

## Sexto juego de ejercicios

1. Considere un modelo de Ramsey con previsión perfecta y función de utilidad aditivamente separable en el tiempo. Suponga que cada individuo tiene una unidad de trabajo en cada período y la ofrece inelásticamente.
  - 1.1. Represente en el par de ejes capital-consumo los efectos de un aumento de la tasa subjetiva de descuento ( $\rho$ ) sobre el consumo y el capital per cápita. Parta de un estado estacionario inicial, determine el estado estacionario final e identifique la trayectoria dinámica del sistema.
  - 1.2. ¿Es posible decir si el consumo y el capital per cápita en el nuevo estado estacionario serán mayores, menores o iguales que en el estado inicial? Explique.
  - 1.3. ¿Es posible decir si el consumo y el capital per cápita en el primer instante después del aumento de la tasa de descuento serán mayores, menores o iguales que en el estado estacionario inicial? Explique.
2. Muestre que, en un modelo de Ramsey, los senderos de consumo y capital del equilibrio de mercado y del problema de crecimiento óptimo coinciden. Utilice el modelo de la economía de mercado en tiempo continuo y las condiciones de primer orden para la solución de ese modelo que presentamos en clase.
  - 2.1. Formule el problema de crecimiento óptimo.
  - 2.2. Muestre que las condiciones de primer orden que caracterizan la solución del problema de crecimiento óptimo coinciden con las encontradas para la economía de mercado.
3. Considere una variante del modelo de Ramsey en el cual las preferencias están dadas por  $\int_0^{\infty} \exp(-\rho t) u(c(t)) dt$  y la población crece a la tasa constante  $n$ . Note que, a diferencia de la versión del modelo vista en clase, la tasa de crecimiento de la población no incide en la tasa de descuento. ¿Cómo afecta esta modificación al equilibrio? En otras palabras, ¿en qué aspectos difiere el equilibrio de esta economía del que encontramos en clase? Específicamente:
  - 3.1. ¿Cómo incide la tasa de crecimiento de la población en el capital per capita en el estado estacionario?
  - 3.2. ¿Cómo se modifica la condición de transversalidad?

Sugerencia: dado que ya sabemos que las soluciones de crecimiento óptimo y de equilibrio de mercado coinciden, sugiero resolverlo como un problema de crecimiento óptimo, ya que resulta más sencillo.

4. Considere una familia que resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \underset{\{c(t)\}_0^{\infty}}{\text{Maximizar}} \quad & \int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \int_0^{\infty} c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \leq a(0) + \int_0^{\infty} w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \end{aligned}$$

- 4.1. Caracterice el sendero óptimo de consumo.  
 4.2. Compare sus resultados con los obtenidos en clase y en Acemoglu (2009, capítulo 8) para el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 \underset{\{c(t)\}_0^\infty}{\text{Maximizar}} & \int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt \\
 \text{sujeto a:} & \dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + w(t) - c(t) \\
 & \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \exp\left[-\int_0^t (r(s) - n) ds\right] \geq 0
 \end{aligned}$$

5. Considere una familia que tiene la siguiente restricción presupuestal intertemporal:

$$\int_0^\infty c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \leq a(0) + b(0) + \int_0^\infty (w(t) - \tau(t)) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt$$

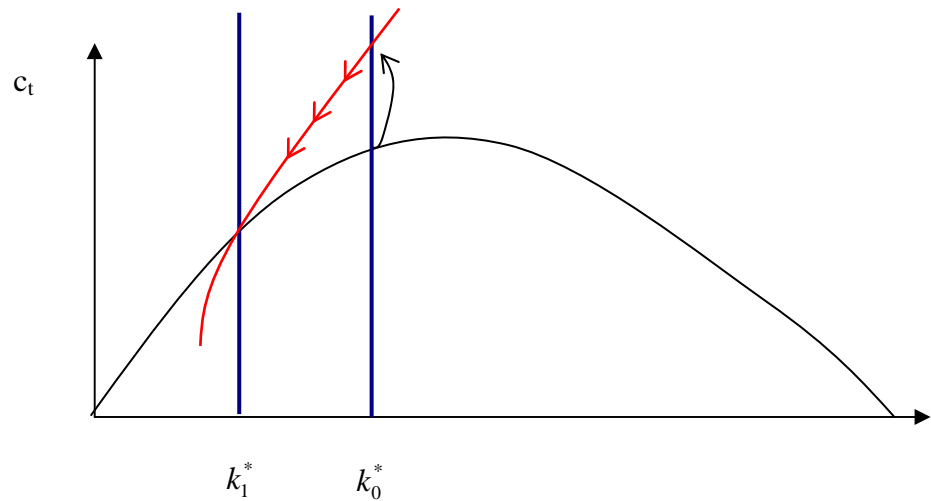
Donde  $b(0)$  son los bonos del gobierno en poder de la familia en el momento 0 y  $\tau(t)$  son los impuestos de suma fija que paga la familia en  $t$ . Todo está expresado en términos per cápita. Demuestre que se verifica la equivalencia ricardiana.

Ayuda: Utilice la restricción presupuestal intertemporal del gobierno:

$$\int_0^\infty (\tau(t) - g(t)) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt = b(0)$$

**Pauta de respuesta**

1.1.



Al aumentar la tasa subjetiva de descuento, se reduce el capital del estado estacionario. La condición de consumo constante es en este modelo:  $f'(k^*) = \rho + \delta$  y como el producto marginal del capital es decreciente, mayor tasa de descuento implica menor capital. Entonces el lugar geométrico de consumo constante se desplaza hacia la izquierda. El individuo aumenta en forma discreta su consumo al aumentar su tasa de descuento y se coloca sobre el sendero de silla del nuevo estado estacionario. Al desplazarse sobre ese sendero hacia el nuevo estado estacionario, tanto el consumo como el capital van disminuyendo.

1.2. Por lo ya expuesto, sabemos que el capital per capita en el nuevo estado estacionario será menor que en el estado estacionario inicial. Con este menor capital de estado estacionario y dado que la economía es dinámicamente eficiente, el consumo del estado estacionario también cae.

1.3. El capital en el instante inicial no se modifica. Es una variable que se mueve en forma continua en el tiempo, gobernada por una ecuación diferencial. El consumo aumenta en forma discreta en el instante inicial.

2.1. El problema de crecimiento óptimo es el problema que resolvería un planificador central que elige los senderos de capital y consumo para maximizar la utilidad de las familias. En la economía que consideramos en clase, la función de utilidad

intertemporal es:  $\int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt$ . La ecuación de movimiento del capital es:

$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n + \delta)k(t) - c(t)$ . El planificador central resuelve entonces el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^{\infty} \exp(-(\rho-n)t) u(c(t)) dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) \end{aligned}$$

2.2. El Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H = u(c(t)) + \mu(t)[f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)]$$

Las condiciones de primer orden son:

1) Maximización del Hamiltoniano:  $H_c = u'(c(t)) - \mu(t) = 0$

2) Ecuación de movimiento de la variable de coestado:

$$H_k = \mu(t)[f'(k(t)) - \delta - n] = -\dot{\mu}(t) + (\rho - n)\mu(t)$$

3) Ecuación de movimiento de la variable de estado:  $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)$

4) Condición de transversalidad:  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-(\rho-n)t) \mu(t) k(t)] = 0$

Primero derivamos la condición de Euler de este problema y luego vemos la condición de transversalidad.

De la condición de movimiento de la variable de coestado deducimos que:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -[f'(k(t)) - \delta - \rho] \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \mu(0) \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - \rho] ds\right) \quad (1)$$

Derivamos en el tiempo la condición que surge de la maximización del Hamiltoniano:

$$u'(c(t)) = \mu(t) \quad \Rightarrow \quad u''(c(t))\dot{c}(t) = \dot{\mu}(t)$$

Dividimos por la variable de coestado y volvemos a usar que la variable de coestado es igual a la utilidad marginal del consumo:

$$\frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{\mu(t)} = \frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \quad (2)$$

Por (1) y (2):

$$\frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = -[f'(k(t)) - \delta - \rho]$$

Multiplicamos y dividimos por el consumo y reordenamos términos:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \sigma_u [f'(k(t)) - \delta - \rho] \quad ; \quad \sigma_u = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))c(t)}$$

Esta condición de Euler es idéntica a la que obtuvimos en la solución del equilibrio de mercado de esta economía. Falta ver que la condición de transversalidad también coincide con la obtenida en la economía de mercado.

Usamos la trayectoria de la variable de coestado que determinamos en (1) en la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-(\rho - n)t) \mu(t) k(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-(\rho - n)t) \mu(0) \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - \rho] ds\right) k(t) \right] = 0$$

Observamos que la variable de coestado evaluada en el momento cero es la utilidad marginal del consumo en cero y que esto es distinto de cero. Por lo tanto, se puede eliminar en la ecuación anterior. Sumamos los términos en las dos exponenciales, cancelando la tasa subjetiva de descuento y obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - n] ds\right) k(t) \right] = 0$$

Esta condición es idéntica a la que obtuvimos en la resolución del equilibrio de mercado.

Conclusión: los senderos de consumo y capital en el problema de crecimiento óptimo coinciden con los senderos de consumo y capital del equilibrio de mercado.

3. El problema de crecimiento óptimo es el problema que resolvería un planificador central que elige los senderos de capital y consumo para maximizar la utilidad de las familias. El planificador central resuelve entonces el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{\{c(t), k(t)\}_0^\infty} \int_0^\infty \exp(-\rho t) u(c(t)) dt \\ & \text{sujeto a:} \quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - (n + \delta)k(t) - c(t) \end{aligned}$$

El Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H = u(c(t)) + \mu(t) [f(k(t)) - (n + \delta)k(t) - c(t)]$$

Las condiciones de primer orden son:

1) Maximización del Hamiltoniano:  $H_c = u'(c(t)) - \mu(t) = 0$

2) Ecuación de movimiento de la variable de coestado:

$$H_k = \mu(t) [f'(k(t)) - \delta - n] = -\dot{\mu}(t) + \rho \mu(t)$$

3) Ecuación de movimiento de la variable de estado:  $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n + \delta)k(t) - c(t)$

4) Condición de transversalidad:  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-\rho t) \mu(t) k(t)] = 0$

Primero derivamos la condición de Euler de este problema y luego vemos la condición de transversalidad.

De la condición de movimiento de la variable de coestado deducimos que:

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -[f'(k(t)) - \delta - n - \rho] \Rightarrow \mu(t) = \mu(0) \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - n - \rho] ds\right) \quad (3)$$

Derivamos en el tiempo la condición que surge de la maximización del Hamiltoniano:

$$u'(c(t)) = \mu(t) \Rightarrow u''(c(t))\dot{c}(t) = \dot{\mu}(t)$$

Dividimos por la variable de coestado y volvemos a usar que la variable de coestado es igual a la utilidad marginal del consumo:

$$\frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{\mu(t)} = \frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \quad (4)$$

Por (3) y (4):

$$\frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = -[f'(k(t)) - \delta - n - \rho]$$

Multiplicamos y dividimos por el consumo y reordenamos términos:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \sigma_u [f'(k(t)) - \delta - n - \rho] ; \sigma_u = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))c(t)}$$

En el estado estacionario el consumo es constante, de tal manera que el capital del estado estacionario queda determinado por la siguiente ecuación:

$$f'(k^*) = \delta + n + \rho$$

**Notar:** a diferencia de la versión del modelo desarrollada en clase, ahora el capital del estado estacionario depende de la tasa de crecimiento de la población. Cuanto mayor es esta tasa, menor es el capital del estado estacionario. Este resultado es análogo al que se encuentra en el modelo de Solow. En la versión del modelo presentada en clase (la misma que desarrolla Acemoglu como modelo base) suponemos que las individuos son “totalmente altruistas” respecto a su descendencia: la familia considera la utilidad de sus miembros futuros en un plano de igualdad con la utilidad de los miembros actuales. Por eso, en esa versión del modelo, la utilidad de la familia en  $t$  es

$L(t)u(c(t)) = \exp(nt)u(c(t))$ , lo cual descontado al momento cero por la tasa subjetiva de descuento es:  $\exp((- \rho + n)t)u(c(t))$ . En cambio en la variante considerada en este ejercicio, la familia sólo toma en cuenta el consumo per cápita y la utilidad que de allí se deriva. No asigna mayor peso a los consumos cuando estos son realizados por más miembros de la familia. La versión “totalmente altruista” del modelo implica que la familia va a ahorrar más durante la transición cuanto mayor sea la tasa de crecimiento

de la población. Anticipando más bocas que alimentar en el futuro, decide ser más frugal en la transición.

Usamos la trayectoria de la variable de coestado que determinamos en (1) en la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(-\rho t) \mu(t) k(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp(-\rho t) \mu(0) \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - n - \rho] ds\right) k(t) \right] = 0$$

Observamos que la variable de coestado evaluada en el momento cero es la utilidad marginal del consumo en cero y que esto es distinto de cero. Por lo tanto, se puede eliminar en la ecuación anterior. Sumamos los términos en las dos exponenciales, cancelando la tasa subjetiva de descuento y obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(-\int_0^t [f'(k(s)) - \delta - n] ds\right) k(t) \right] = 0$$

La condición de transversalidad es la misma que la que teníamos en la versión del modelo con individuos “totalmente altruistas”.

4.1. Tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{\{c(t)\}_0^\infty} & \int_0^\infty \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt \\ \text{sujeto a:} & \int_0^\infty c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \leq a(0) + \int_0^\infty w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \end{aligned}$$

Podemos observar directamente que, por ser la utilidad creciente en el consumo, es óptimo llevar el consumo a niveles tales que la restricción presupuestal sea operativa:

$$\int_0^\infty c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt = a(0) + \int_0^\infty w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt$$

$$\text{Esto implica que: } \lim_{T \rightarrow \infty} a(T) \exp\left[-\int_0^T (r(s) - n) ds\right] = 0$$

(5)

dado que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt &= a(0) + \int_0^\infty w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \\ &\quad - a(T) \exp\left[-\int_0^\infty (r(s) - n) ds\right] \end{aligned}$$

Por otra parte, el problema de optimización de utilidad de las familias sujeto a una restricción presupuestal intertemporal es análogo a una optimización estática con infinitos bienes. Escribimos el lagrangeano:

$$L = \int_0^{\infty} \exp(-(\rho - n)t) u(c(t)) dt + \lambda \left[ a(0) + \int_0^{\infty} w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt - \int_0^{\infty} c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \right]$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c(t)} = \exp(-(\rho - n)t) u'(c(t)) - \lambda \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) = 0$$

Tomo logaritmo natural:

$$-(\rho - n)t + \ln(u'(c(t))) = \ln \lambda - \int_0^t (r(s) - n) ds$$

Derivo en t:

$$-(\rho - n) + \frac{u''(c(t))}{u'(c(t))} \dot{c}(t) = -(r(t) - n)$$

$$-\frac{u''(c(t))c(t)}{u'(c(t))} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = (r(t) - \rho) \Rightarrow \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \sigma_u (r(t) - \rho)$$

(6)

Las condiciones (5) y (6) caracterizan los senderos óptimos de consumo y de acumulación de activos de la familia.

4.2. Las condiciones (5) y (6) coinciden exactamente con las condiciones del óptimo del problema de maximización de la utilidad de las familias sujeto a la restricción presupuestal de flujo y a la condición de que no hay un juego de Ponzi.

5. Se trata de mostrar que la restricción presupuestal de la familia no depende del sendero específico de impuestos ni del nivel de deuda. Lo único que importa es cuál es el total de recursos que el gobierno extrae a través de sus compras  $g$ . Si es así, entonces (i) es equivalente cobrar los impuestos hoy o mañana y, en ese sentido, la forma de financiar el gasto es irrelevante y (ii) los bonos “no son riqueza neta”.<sup>1</sup>

Lo que hacemos es sustituir la deuda pública inicial en la restricción presupuestal de la familia usando la restricción presupuestal del gobierno:

---

<sup>1</sup> En un artículo famoso, Robert Barro se pregunta si los bonos del gobierno son riqueza neta. La respuesta es que no lo son, básicamente por las razones que vemos en este ejercicio. La expresión equivalencia ricardiana proviene de que estamos también mostrando que es equivalente cobrar los impuestos hoy o cobrarlos mañana y de que David Ricardo había observado informalmente este mismo punto en sus principios de economía política y de tributación (Barro R J. Are government bonds net wealth? J. Polit. Econ. 82:1095-117, 1974).

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} c(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \leq \\ & a(0) + b(0) + \int_0^{\infty} (w(t) - \tau(t)) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt = \\ & a(0) + \int_0^{\infty} (\tau(t) - g(t)) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt + \int_0^{\infty} (w(t) - \tau(t)) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt = \\ & a(0) - \int_0^{\infty} g(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt + \int_0^{\infty} w(t) \exp\left(-\int_0^t (r(s) - n) ds\right) dt \end{aligned}$$