Séptimo juego de ejercicios

1. Considere una familia con las siguientes preferencias:

$$\int_0^\infty \exp(-(\rho-n)t)\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt \; ; \; \theta \geq 0 \, , \, \theta \neq 1$$

Determine la ecuación de Euler que corresponde a la maximización de esta función de utilidad sujeta a la restricción presupuestal de la familia.

2. Considere el modelo de Ramsey o modelo neoclásico de crecimiento con progreso técnico (aumentador del trabajo). La producción está dada por $Y(t)=F(K(t),A(t)L(t))$ donde $A(t)=\exp(gt)A(0)$ y g es entonces la tasa de progreso técnico. La función de producción es creciente, cóncava y homogénea de grado uno en sus dos argumentos.

2.1. Escriba la ecuación dinámica del capital por unidad de trabajo "efectivo". En otras palabras, defina el capital por unidad de trabajo "efectivo" como $k(t)=K(t)/(A(t)L(t))$ y el consumo por unidad de trabajo efectivo como $\tilde{c}(t)=C(t)/(A(t)L(t))$ y escriba la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de $k(t)$.

2.2. Las familias tienen preferencias representadas por $\int_0^\infty \exp(-(\rho-n)t)u(c(t))dt$ donde $c(t)=C(t)/L(t)$ es el consumo per capita. Sabiendo que la ecuación de Euler es $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\sigma_u(t)(r(t)-\rho)$ y que $r(t)=f'(k(t))-\delta$, determine la ecuación diferencial que gobierna la dinámica del consumo por unidad de trabajo "efectivo" $(\tilde{c}(t))$.

2.3. Caracterice el estado estacionario. En particular, diga a qué tasa crecen en el estado estacionario (i) el capital por unidad de trabajo "efectivo", (ii) el consumo por unidad de trabajo "efectivo" $(\tilde{c}(t))$ y (iii) el consumo per capita $(c(t))$.

Pauta de respuesta

1. Sabemos que la condición de Euler en general es:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \sigma_u [r(t) - \rho] \quad ; \quad \sigma_u = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))c(t)}$$

En este caso tenemos: $u(c(t)) = \dfrac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \Rightarrow u'(c(t)) = c(t)^{-\theta} \Rightarrow u''(c(t)) = -\theta\, c(t)^{-\theta-1}$

Entonces: $\sigma_u = -\dfrac{u'(c(t))}{u''(c(t))c(t)} = \dfrac{c(t)^{-\theta-1}}{\theta\, c(t)^{-\theta-1}} = \dfrac{1}{\theta}$

En este caso, el parámetro θ es la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal y es constante. Por esta razón, esta función se conoce como de elasticidad de sustitución constante o CES (por la sigla en inglés). La ecuación de Euler queda entonces:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[r(t) - \rho]$$

2.1. La dinámica del capital está dada por: $\dot{K} = F(K, AL) - C - \delta K$

(Obvié las referencias al período t para simplificar la notación). Dividiendo por la cantidad de unidades de trabajo efectivo: $\dfrac{\dot{K}}{AL} = F\left(\dfrac{K}{AL}, 1\right) - \tilde{c} - \delta k = f(k) - \tilde{c} - \delta k$

La tasa de variación del capital por unidad de trabajo efectivo es:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - (g+n)k$$

Combinando estas dos condiciones: $\dot{k} = f(k) - \tilde{c} - (n + g + \delta)k$

2.2. Sabemos que: $\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \sigma_u(t)(f'(k(t)) - \delta - \rho)$

A su vez, $\tilde{c}(t) = C(t)/(A(t)L(t)) = c(t)/A(t) \qquad \Rightarrow \dfrac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)} - g$

Por lo tanto: $\dfrac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \sigma_u(t)(f'(k(t)) - \delta - \rho) - g$

2.3. Esta economía va a alcanzar un estado estacionario en términos del consumo y el capital por unidad de trabajo "efectivo". Por lo tanto, en el estado estacionario, el capital y el consumo por unidad de trabajo efectivo no crecen. El consumo per capita crece a la tasa g ya que, como vimos en la respuesta 2.2:

$$\frac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - g$$

En el estado estacionario debe verificarse que: $\dot{k} = f\left(k^*\right) - \tilde{c}^* - \left(n + g + \delta\right)k^* = 0$ y $\frac{d\tilde{c}(t)/dt}{\tilde{c}(t)} = \sigma_u\left(f'\left(k^*\right) - \delta - \rho\right) - g = 0$. Notar que para que la tasa de crecimiento del consumo por unidad de trabajo "efectivo" tienda a cero debe verificarse que la elasticidad de sustitución intertemporal tienda a una constante: $\lim_{t\to\infty}\sigma_u(t) = \sigma_u$. Es decir que la función de utilidad tiene que tender a la larga a una CES para que tengamos un estado estacionario. Notar también que en este estado estacionario, la economía exhibe un "sendero de crecimiento balanceado" tal como fuera descrito por Kaldor: tasa de crecimiento del producto constante, relación capital producto constante y participación del capital en el ingreso nacional constante.
(Acemoglu, 2009, presenta los resultados utilizados para armar este ejercicio en la sección 8.7).