Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República, Uruguay
Maestría en Economía Internacional 2009. Macroeconomía. Alvaro Forteza

Índice de diapositivas en Tr2009_3_OLG_Fiscal.doc

4 Política fiscal en modelos de generaciones solapadas

4.1 Introducción

Definición de política fiscal: $\left[g_t, \tau_1^t, \tau_2^{t-1}\right]_{t=1}^{\infty}$

donde:

$g_t =$ *(compras del gobierno en t)/*L_t

$\tau_1^t =$*(impuestos netos de transferencias cobrados a la generación t en su primer período, es decir en t)/*L_t

τ_2^{t-1} =*(impuestos netos de transferencias cobrados a la generación t-1 en su segundo período, es decir en t)/*L_{t-1}

Deuda pública: gobierno emite bonos.

Supuestos:

- Los bonos están indexados
- Maduran en un período: principal e intereses pagados al madurar el bono
- Sustituto perfecto de la deuda privada

$b_t = B_t / L_t =$ *Deuda pública* ***que madura en t****/*L_t

Restricción presupuestal del gobierno

$$B_{t+1} - B_t = L_t g_t + r_t B_t - \left(L_t \tau_1^t + L_{t-1} \tau_2^{t-1} \right)$$

Por miembro de la generación t:

$$B_{t+1}/L_t - B_t/L_t = g_t + r_t B_t/L_t - \left(\tau_1^t + L_{t-1}\tau_2^{t-1}/L_t\right)$$

$$(1+n)b_{t+1} = g_t + (1+r_t)b_t - \tau_1^t - \tau_2^{t-1}/(1+n)$$

Déficit primario per capita $= g_t - \tau_1^t - \tau_2^{t-1}/(1+n)$

Política fiscal "equilibrada": $g_t = \tau_1^t + \tau_2^{t-1}/(1+n)$

Agenda de temas:

1. Seguridad social: $g = 0$, $b = 0$
2. Política fiscal con presupuesto equilibrado: $b = 0$
3. Déficit fiscal y deuda pública: $b \neq 0$

4.2 Seguridad Social

Dos sistemas de financiación de las jubilaciones y pensiones:

- Capitalización (= *funded*)
- Reparto (= *unfunded* = *"Pay As You Go"* = *PAYG*)

Sistema	Contribución/L_t	(Beneficios recibidos en t+1)/L_t
Capitalización	τ	$\tau(1+r_{t+1})$
Reparto	τ	$\tau(1+n)$

Supuesto: impuestos y transferencias de suma fija

4.2.1 Sistema de capitalización

Proposición: La introducción de un sistema de seguridad social basado en la capitalización, con aportes y beneficios de suma fija, no altera el equilibrio de una economía competitiva de mercado, si las contribuciones son menores o iguales al ahorro existente antes de la introducción de la seguridad social.

Demostración:

1. El problema de optimización de la familia h es:

$$\underset{C_{1h}^{t},C_{2h}^{t}}{Max} \qquad u^{h}\left(C_{1h}^{t},C_{2h}^{t}\right)$$

$$sa: \qquad C_{1h}^{t}+\left(Z^{h,v}+\tau\right)\leq w_{t}$$

$$C_{2h}^{t}\leq\left(Z^{h,v}+\tau\right)R_{t+1}$$

$$C_{1h}^{t}\geq 0 \quad ; \quad C_{2h}^{t}\geq 0$$

donde:

$Z^{h,v}$ = ahorro "voluntario" de h

τ = ahorro "obligatorio" = contribución a la seguridad social

Defino el ahorro total de h en presencia de seguridad social como:

$$Z_{SS}^{h}=Z^{h,v}+\tau$$

Notar: la función de ahorro previa a la introducción de la seguridad social sigue valiendo para el ahorro total:

$$Z_{SS}^{h} = Z^{h}\left(R_{t+1}, W_{t}\right)$$

2. Agregación

En una economía sin seguridad social tenemos:

$$Z\left(R_{t+1}, W_{t}\right) = \sum_{h=1}^{H} Z^{h}\left(R_{t+1}, W_{t}\right) \Big/ H = (1+n)k_{t+1} \geq 0$$

En una economía con seguridad social tenemos:

$$\sum_{h=1}^{H} Z_{SS}^{h}\left(R_{t+1}, W_{t}\right) \Big/ H \geq \tau$$

Ya que el ahorro voluntario agregado y medio de los jóvenes es no negativo (los jóvenes no reciben crédito de los ancianos):

$$Z^{v} = \sum_{h=1}^{H} Z^{h,v}\left(R_{t+1}, W_{t}\right) \Big/ H \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad Z_{SS} = Max\left\{Z\left(R_{t+1}, W_{t}\right)\,,\ \tau\right\} = (1+n)k_{t+1}^{SS}$$

Hay entonces dos casos posibles:

1) La seguridad social no altera la dinámica de la economía si: $\tau \leq Z\left(R_{t+1}, W_{t}\right)$ ya que en ese caso: $Z_{SS} = Z\left(R_{t+1}, W_{t}\right)$

2) La seguridad social fuerza un aumento del ahorro si: $\tau > Z\left(R_{t+1}, W_{t}\right)$ ya que en ese caso: $Z_{SS} = \tau$

4.2.2 Sistema de reparto

Dos diferencias respecto a capitalización:

1. Tasa de retorno privado de la SS con reparto = 1 + n
2. La SS no acumula capital ==> ahorro privado es la única fuente de capital

Programa de las familias:

$$
\begin{aligned}
&\underset{C_{1h}^t, C_{2h}^t}{Max} && u^h\left(C_{1h}^t, C_{2h}^t\right) \\
&sa: && C_{1h}^t \leq w_t - \tau - Z^h \\
& && C_{2h}^t \leq Z^h R_{t+1} + \tau(1+n) \\
& && C_{1h}^t \geq 0 \quad ; \quad C_{2h}^t \geq 0
\end{aligned}
$$

Ya no identificamos las contribuciones con un ahorro forzoso:

a) Los beneficios no dependen de las contribuciones realizadas en la vida activa del actual pasivo, sino de las contribuciones que realizan los activos de hoy.

b) El sistema es de transferencia pura y, por lo tanto, las contribuciones a la seguridad social no agregan capital.

Resolviendo, se obtiene que el ahorro depende de la tasa de interés, el ingreso de joven y el ingreso de viejo:

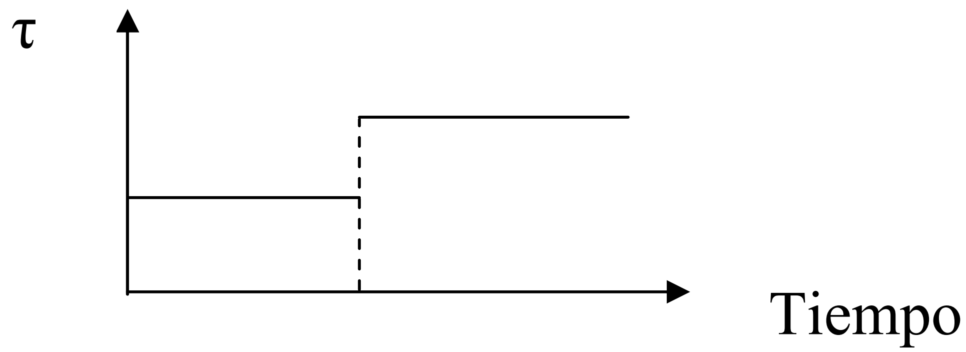
$$Z^h\left(R_{t+1}, W_t - \tau, \tau(1+n)\right)$$

En el equilibrio general:

$$(1+n)k_{t+1} = Z^h\left(R_{t+1}, W_t - \tau, \tau(1+n)\right)$$
$$R_{t+1} = 1 + f'(k_{t+1}) - \delta$$
$$W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Efectos del sistema de reparto en la dinámica

Tipo de política a considerar:



Teorema (Teorema 18.1 en Azariadis, p 292)

Si $C_{1h}^{t}\ \ y\ C_{2h}^{t}$ son normales y τ es la contribución a un sistema de reparto, entonces:

a) $\partial Z/\partial\tau < 0$

b)

$\left|\partial Z/\partial\tau\right| > 1\ \ si\ \ r < n$

$\left|\partial Z/\partial\tau\right| = 1\ \ si\ \ r = n$

$\left|\partial Z/\partial\tau\right| < 1\ \ si\ \ r > n$

Comentario: $\partial Z/\partial\tau$ es el efecto directo, con W_t y R_{t+1} dados. Para analizar el efecto total de un aumento de los aportes a la seguridad social, habrá que incorporar los cambios que puedan producirse en W_t y R_{t+1}. Ese es el tema de la siguiente proposición.

Demostración: La restricción presupuestal de h es:

$$C_{1h}^{t} + \frac{C_{2h}^{t}}{R_{t+1}} \leq \left(W_t - \tau\right) + \frac{(1+n)\tau}{R_{t+1}} = \bar{e}$$

Su ahorro en t es: $Z_t^h = W_t - \tau - C_{1h}^t$

Notar: las contribuciones a la SS afectan el ahorro directamente, reduciendo el ingreso disponible del joven, e indirectamente, modificando su consumo debido al cambio en su riqueza.

$$\begin{tikzcd}
& \nabla\left(W_t - \tau\right) \arrow[rrd] & & \\
\Delta\tau \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \nabla Z_t^h \\
& \Delta\bar{e}\begin{cases} > 0 \ si \ n > r \\ = 0 \ si \ n = r \\ < 0 \ si \ n < r \end{cases} \arrow[r] & \Delta C_{1h}^t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Formalmente: $\partial Z^h / \partial \tau = -\left(1 + \partial C_{1h}^t / \partial \tau\right)$

$$\partial C_{1h}^t / \partial \tau = \frac{\partial C_{1h}^t}{\partial \overline{e}} \frac{\partial \overline{e}}{\partial \tau} = \frac{\partial C_{1h}^t}{\partial \overline{e}} \left(-1 + \frac{1+n}{R_{t+1}} \right) = \frac{\partial C_{1h}^t}{\partial \overline{e}} \left(\frac{n - r_{t+1}}{R_{t+1}} \right)$$

¿Qué sabemos de $\partial C_{1h}^t / \partial \overline{e}$?

(i) $\partial C_{1h}^t / \partial \overline{e} > 0$, ya que C_{1h}^t es un bien normal.
(ii) $\partial C_{1h}^t / \partial \overline{e} < 1$, ya que C_{2h}^t es un bien normal.

Para deducir (ii) diferenciamos la restricción presupuestal:

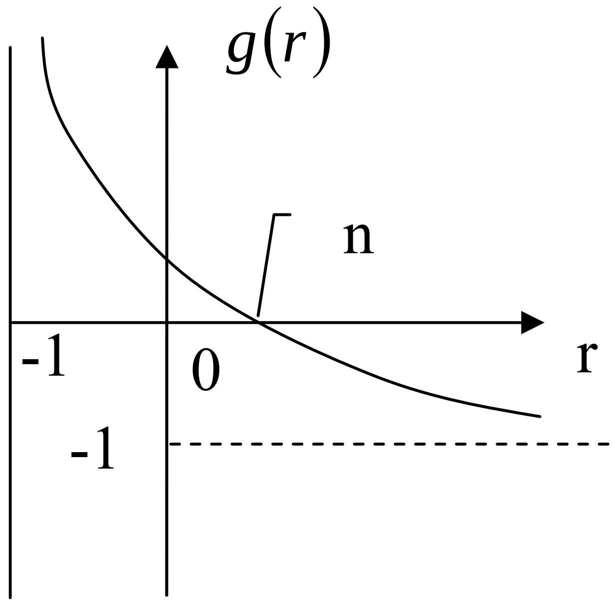
$$dC_{1h}^t + \left(1/R_{t+1}\right) dC_{2h}^t = d\overline{e}$$

$$dC_{1h}^{t}\big/d\bar{e} = 1-(1/R_{t+1})dC_{2h}^{t}\big/d\bar{e} < 1 \text{ , } dado\ que\ \ dC_{2h}^{t}\big/d\bar{e} > 0$$

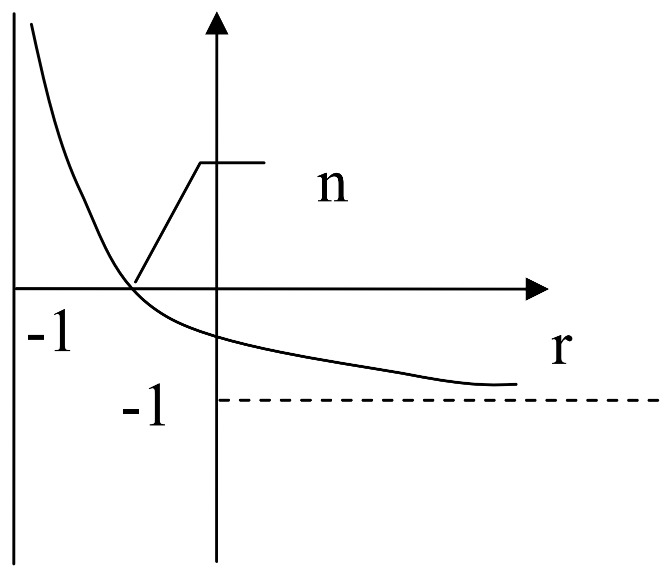
Llamemos por comodidad: $\theta = \partial C_{1h}^{t}\big/\partial\bar{e}$. Hemos demostrado que $0 < \theta < 1$. Volvemos a la derivada del ahorro en los aportes:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = -\left(1+\theta\frac{(n-r_{t+1})}{R_{t+1}}\right)$$

Mostraremos que $g(r) = (n-r)/(1+r) > -1$, lo cual es suficiente para que $\partial Z/\partial\tau < 0$.



Caso 1: $n > 0$



Caso 2: $n < 0$

Finalmente:

$$
\begin{array}{llll}
Si\ r_{t+1} > n & \Rightarrow \quad \theta(n - r_{t+1})/R_{t+1} < 0 & \Rightarrow & |\partial Z/\partial \tau| < 1 \\
Si\ r_{t+1} = n & \Rightarrow \quad \theta(n - r_{t+1})/R_{t+1} = 0 & \Rightarrow & |\partial Z/\partial \tau| = 1 \\
Si\ r_{t+1} < n & \Rightarrow \quad \theta(n - r_{t+1})/R_{t+1} > 0 & \Rightarrow & |\partial Z/\partial \tau| > 1
\end{array}
$$

■

Proposición: Sean C_1 y C_2 bienes normales. Un aumento de las contribuciones a un sistema de reparto provoca un desplazamiento hacia abajo de la curva *G(k)* si (suficiencia):
a) C_1 y C_2 son sustitutos brutos, o
b) *G(k)* es evaluado en una vecindad de un estado estacionario estable.

Demostración: El desplazamiento vertical de *G(k)* viene dado por:

$$\frac{dk_{t+1}}{d\tau} = \frac{\partial Z / \partial \tau}{1 + n - (\partial Z / \partial R) f''(k_{t+1})}$$

1. Numerador: vimos en el teorema anterior que es negativo

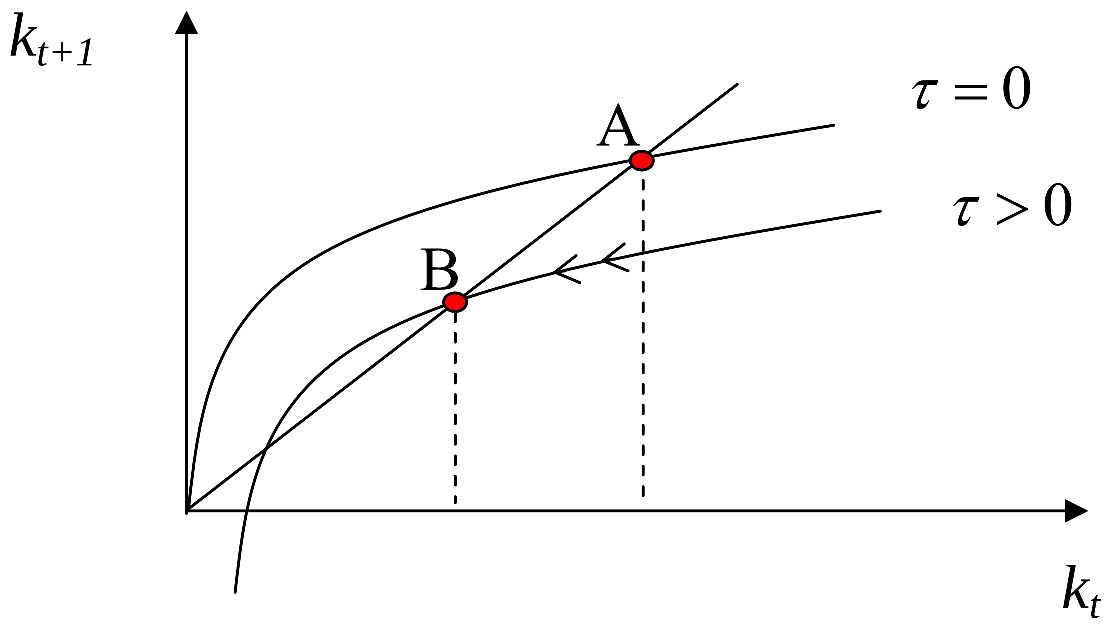
2. Denominador. Condiciones suficientes para que sea positivo

2.1. $\partial Z / \partial R > 0$. Esta condición se verifica si C_1 y C_2 son sustitutos brutos.

2.2. Que k_t esté en una vecindad de un estado estacionario estable. Es una aplicación del principio de correspondencia de Samuelson (ver detalles en Blanchard y Fischer, p 96)

■

Aún con estos resultados, la trayectoria de la economía siguiendo a un aumento de las contribuciones puede ser muy diversa, dependiendo del punto inicial y de la forma particular del mapa G(). Ejemplo: punto inicial es un estado estacionario estable único. En este caso, la introducción de un sistema de SS de reparto reduce el capital en toda la trayectoria y en el nuevo estado estacionario:



4.2.3 Bienestar en el sistema de reparto

El sistema de reparto tiende a desestimular el ahorro (caso estable). ¿Cuáles son los efectos sobre el bienestar?

Dos casos:

a) Si $r < n$ ➔ ineficiencia dinámica ➔ seguridad social mejora el bienestar en el sentido de Pareto

b) $r > n$ ➔ economía dinámicamente eficiente ➔ seguridad social **no** mejora el bienestar en el sentido de Pareto. En este caso, un aumento de las contribuciones mejora utilidad de la primera generación y reduce la utilidad de las siguientes.

4.3 Política Fiscal con Presupuesto Equilibrado

4.3.1 Intercambio puro

Estamos suponiendo que el déficit es cero:

$$g_t = \tau_1^t + \frac{\tau_2^{t-1}}{1+n} \quad , \quad \forall t$$

Supondremos siempre que: $MRS(c_1, c_2)$ es independiente de g.

Las familias

$$\underset{c_{1h}^t,\, c_{2h}^t}{Max}\; u^h\left(c_{1h}^t, c_{2h}^t\right)$$

$$sa:\; c_{1h}^t + \frac{c_{2h}^t}{R_{t+1}} \le \left(e_{1h} - \tau_1^t\right) + \frac{e_{2h} - \tau_2^t}{R_{t+1}}$$

$$c_{1h}^t, c_{2h}^t \ge 0$$

Resolviendo: $z^h\left(R_{t+1}, e_{1h} - \tau_1^t, e_{2h} - \tau_2^t\right)$

Agregando todas las familias:

$$z(.) = \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} z^h\left(R_{t+1}, e_{1h} - \tau_1^t, e_{2h} - \tau_2^t\right)$$

Dados los siguientes supuestos:

– Bien es perecedero

– Gobierno no presta ni pide prestado

– Cada generación es autárquica

Entonces la condición de equilibrio es: $Z(.) = 0$

Valen los teoremas de existencia y unicidad ya vistos para el caso sin gobierno, pero hay una condición adicional: la política fiscal debe ser viable.

Condiciones de viabilidad de la política fiscal

1. Los impuestos deben ser menores o iguales a los recursos en cada momento del tiempo: $\tau_1^t \leq \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} e_{1h}$; $\tau_2^{t-1} \leq \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} e_{2h}$

$$\Rightarrow \qquad g_t \leq \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} e_{1h} + \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} \frac{e_{2h}}{1+n}$$

2. El total de impuestos pagados por cada familia está acotado por sus recursos:

$$\tau_1^t + \frac{\tau_2^t}{R_{t+1}} \leq e_{1h} + \frac{e_{2h}}{R_{t+1}}$$

Proposición: si los dos bienes son no inferiores, entonces:

$$\frac{\partial z^h}{\partial \tau_1} < 0 \quad , \quad \frac{\partial z^h}{\partial \tau_2} > 0$$

Es decir que la curva de ahorro de los jóvenes se desplaza:
(i) hacia la izquierda, si aumentan los impuestos a los jóvenes;
(ii) hacia la derecha, si aumentan los impuestos a los ancianos.
Demostración:

$$z^h = e_{1h} - \tau_1 - c_{1h}^t \;\Rightarrow\; \frac{\partial z^h}{\partial \tau_1} = -1 - \frac{\partial c_{1h}^t}{\partial \tau_1}$$

A su vez, sabemos que:

$$c_{1h}^t + c_{2h}^t \big/ R_{t+1} \leq \left(e_{1h} - \tau_1^t\right) + \left(e_{2h} - \tau_2^t\right) \big/ R_{t+1} = \overline{e}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial c_{1h}^t}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial c_{1h}^t}{\partial \overline{e}} \dfrac{\partial \overline{e}}{\partial \tau_1} = -\dfrac{\partial c_{1h}^t}{\partial \overline{e}}$

Como los bienes son normales: $0<\frac{\partial c_{1h}^{t}}{\partial \overline{e}}<1 \Rightarrow -1<\frac{\partial z^{h}}{\partial \tau_{1}}<0$

A su vez:

$$\frac{\partial z^{h}}{\partial \tau_{2}}=-\frac{\partial c_{1h}^{t}}{\partial \tau_{2}}=-\frac{\partial c_{1h}^{t}}{\partial \overline{e}}\frac{\partial \overline{e}}{\partial \tau_{2}}=\frac{\partial c_{1h}^{t}}{\partial \overline{e}}\frac{1}{R_{t+1}}>0$$

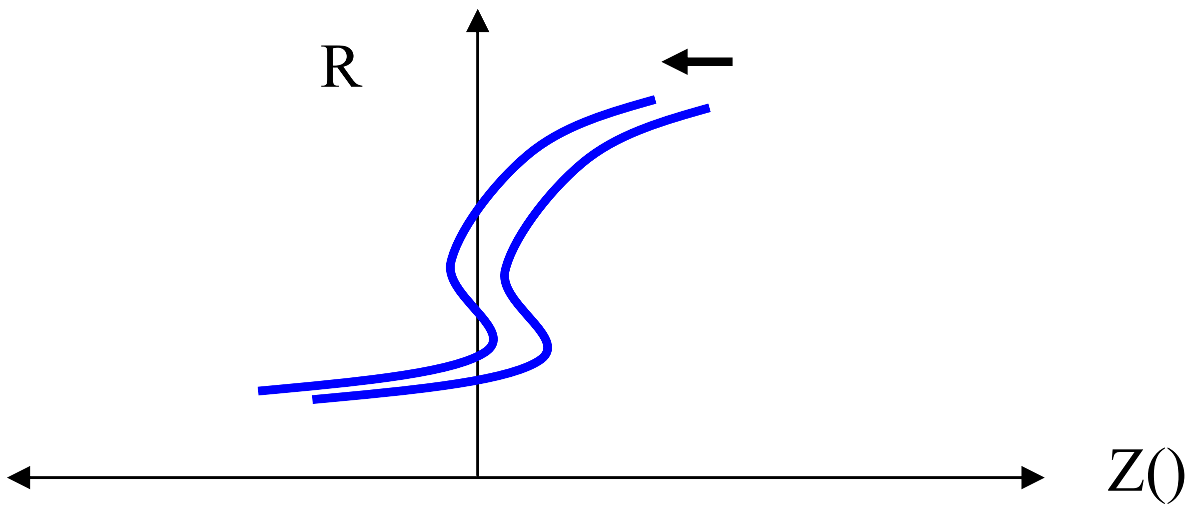
■

Observación: esta proposición se refiere a efectos directos, con R dada.

El equilibrio general

1. Efectos en equilibrio general de aumentar impuestos a los jóvenes, es decir de: $dg_{t}=d\tau_{1}^{t}>0$

Por la proposición anterior, la curva de ahorro de jóvenes se desplaza hacia la izquierda.



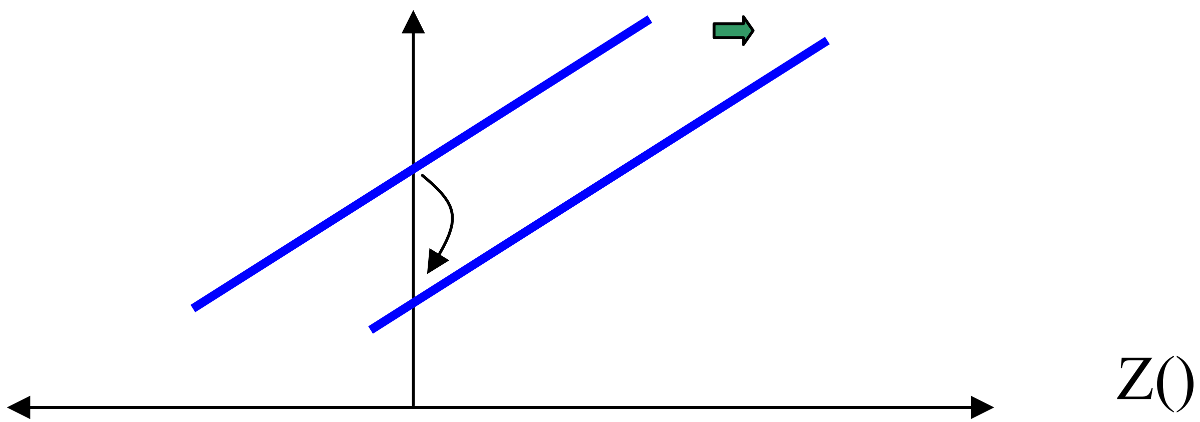
En el equilibrio general: *z()=0*

No hay equilibrios múltiples si:

- Bienes de consumo son sustitutos brutos y/o
- La población es homogénea

Si se da alguna de estas condiciones, la tasa de interés de equilibrio es creciente en los impuestos aplicados a los jóvenes.

2. Efectos en el equilibrio general de aumentar los impuestos a los viejos: $dg_t = d\tau_2^{t-1} > 0$



4.3.2 Generaciones solapadas con producción

Supuestos:

- Individuos disponen de una unidad de trabajo cuando son jóvenes. No se interesan por el ocio.
- Familias iguales (H=1)
- Gobierno no invierte

Resolviendo:

$$(1+n)k_{t+1} = z\left(R_{t+1}, w_t - \tau_1^t, -\tau_2^t\right)$$

$$R_{t+1} = 1 + f'(k_{t+1}) - \delta$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

$$g_t = \tau_1^t + \tau_2^{t-1} / (1+n)$$

+ las condiciones de viabilidad de la política fiscal.

Política 1: Aumento de impuestos a los jóvenes.

Desplazamiento vertical del mapa G(.):

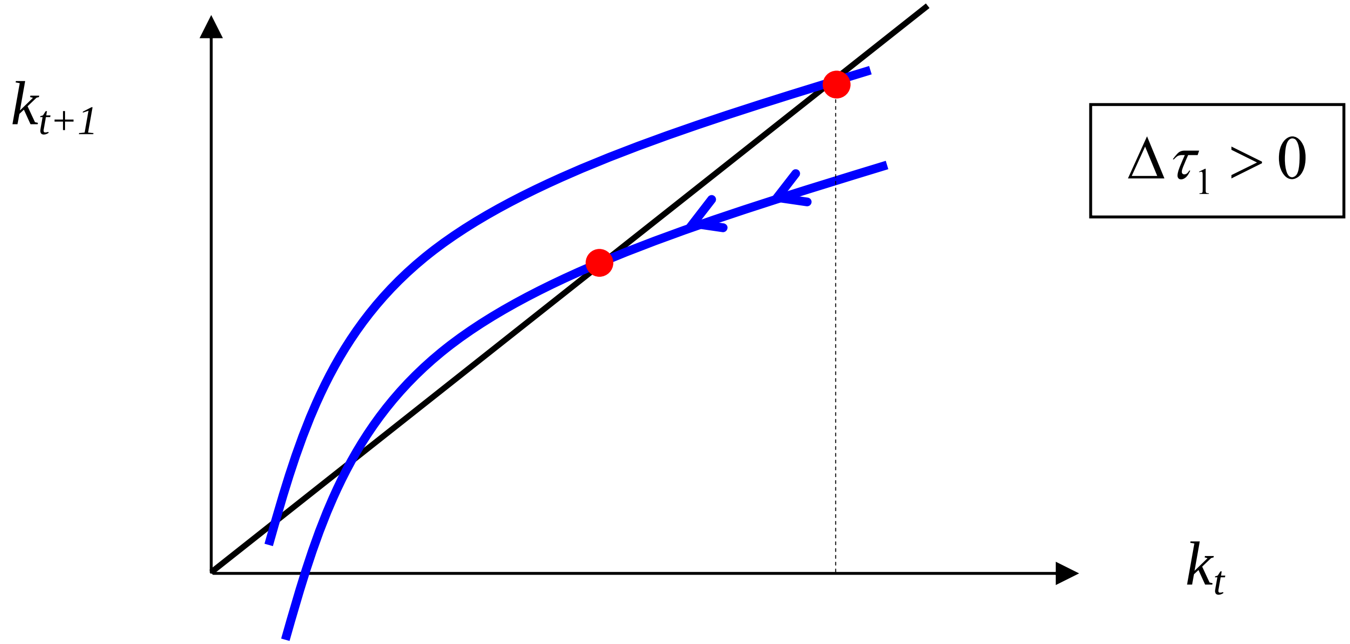
$$(1+n)dk_{t+1} = z_R f''(.)dk_{t+1} + z_{\tau_1} d\tau_1 + z_{\tau_2} d\tau_2$$

La política en este caso es: $d\tau_1 > 0,\ d\tau_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dk_{t+1}}{d\tau_1} = \frac{z_{\tau_1}\left(R_{t+1}, w_t - \tau_1^t, -\tau_2^t\right)}{1+n-z_R\left(R_{t+1,}...\right)f''\left(k_{t+1}\right)}$$

Notar:
a) El numerador es negativo, dada la proposición anterior.

b) El denominador es en principio ambiguo. Pero es positivo si consumos son sustitutos brutos.



Conclusión: aumento de consumo público financiado con aumento de impuestos a jóvenes tiende a reducir acumulación de capital y a incrementar las tasas de interés.

4.4 Déficit fiscal y deuda pública en OLG

4.4.1 La equivalencia ricardiana

Proposición: la deuda pública es equivalente a impuestos de suma fija si *no* redistribuye recursos entre generaciones.

Ejemplo en intercambio puro: Un gobierno reduce impuestos a los jóvenes y emite deuda que madura el período siguiente. Para pagar la deuda, el gobierno aumenta impuestos a los viejos.

Mostraremos que esta operación no modifica el consumo ni la tasa de interés. Sólo cambia el ahorro.

Impuestos por joven en t = $\tau - B_{t+1} / L_t$

Impuestos por viejo en t+1 = $\tau + R_{t+1} B_{t+1} / L_t$

Recordar: L_t es el tamaño de la generación nacida en *t*. Por lo tanto, la cantidad de viejos en *t+1* es L_t (todos los miembros de esta generación mueren en *t+2*).

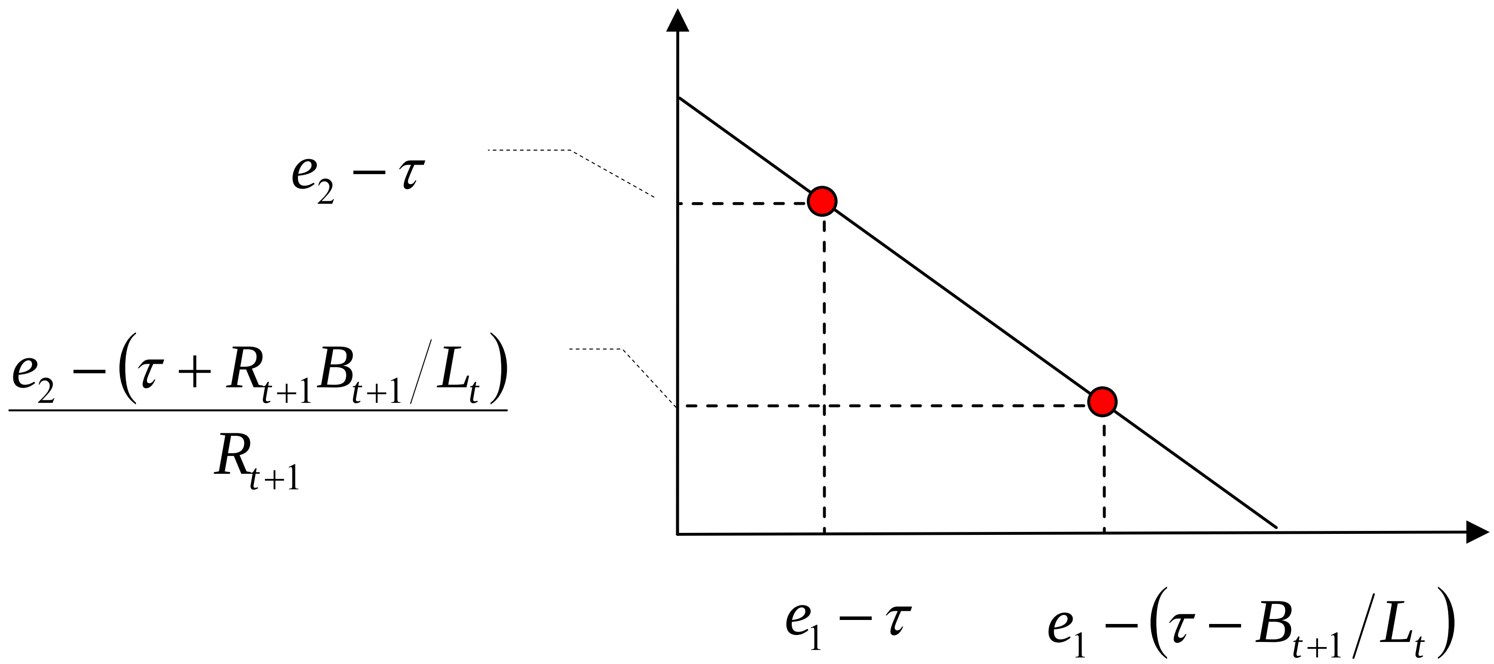
¿Efectos sobre el consumo? La única generación afectada directamente es la nacida en t. Su riqueza total es:

$$\bar{e} = e_1 - \left(\tau - B_{t+1}/L_t\right) + \frac{e_2 - \left(\tau + R_{t+1} B_{t+1}/L_t\right)}{R_{t+1}}$$

$$= e_1 - \tau + \frac{e_2 - \tau}{R_{t+1}}$$

Por lo tanto, su riqueza no cambia por la disminución de impuestos en t y el aumento de impuestos en t+1.

➔ Consumo de la generación t no se modifica.



➔ No se modificó la restricción presupuestal.

4.4.2 Política fiscal sostenible

¿Es la deuda explosiva? ¿Es sostenible un déficit fiscal permanente? ¿Qué efectos tiene en el bienestar?

Marcos analíticos y supuestos alternativos:

a) R exógena
b) R endógena, OLG intercambio, **sin** déficit primario
c) R endógena, OLG intercambio, **con** déficit primario
d) R endógena, OLG con producción, **sin** déficit primario

a) Sostenibilidad de la política fiscal con R exógena

Restricción presupuestal del gobierno:

$$(1+n)b_{t+1} = Rb_t + g - \tau_1 - \tau_2/(1+n) = R\,b_t + q$$

$$b_{t+1} = \frac{R}{1+n} b_t + \frac{q}{1+n}$$

Esta ecuación en diferencias finitas de primer orden determina la dinámica de la deuda.

Estado estacionario:

$$Si\;\; n \neq r \qquad \Rightarrow \quad \bar{b} = q/(n-r)$$

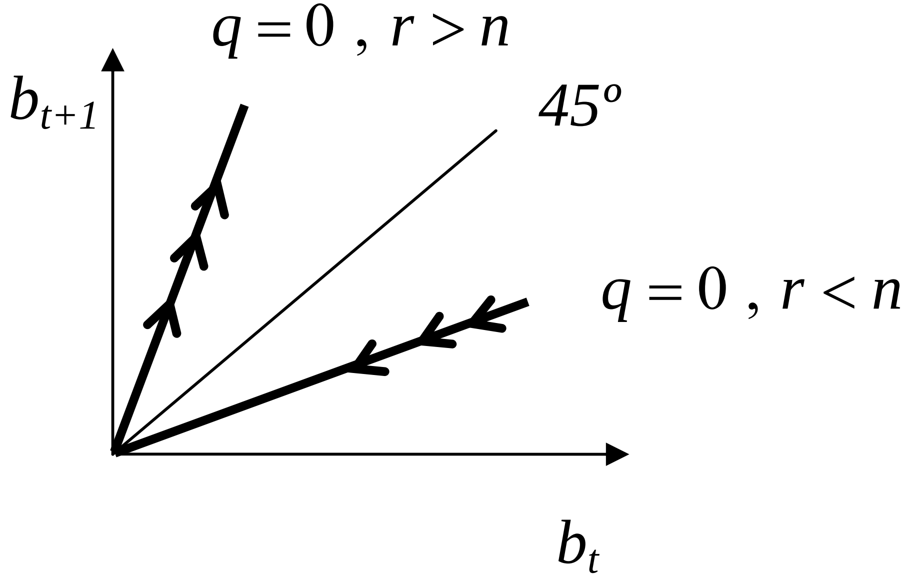
$$Si\;\; n = r\;\; y\;\; q = 0 \;\Rightarrow \quad \bar{b} = b_0$$

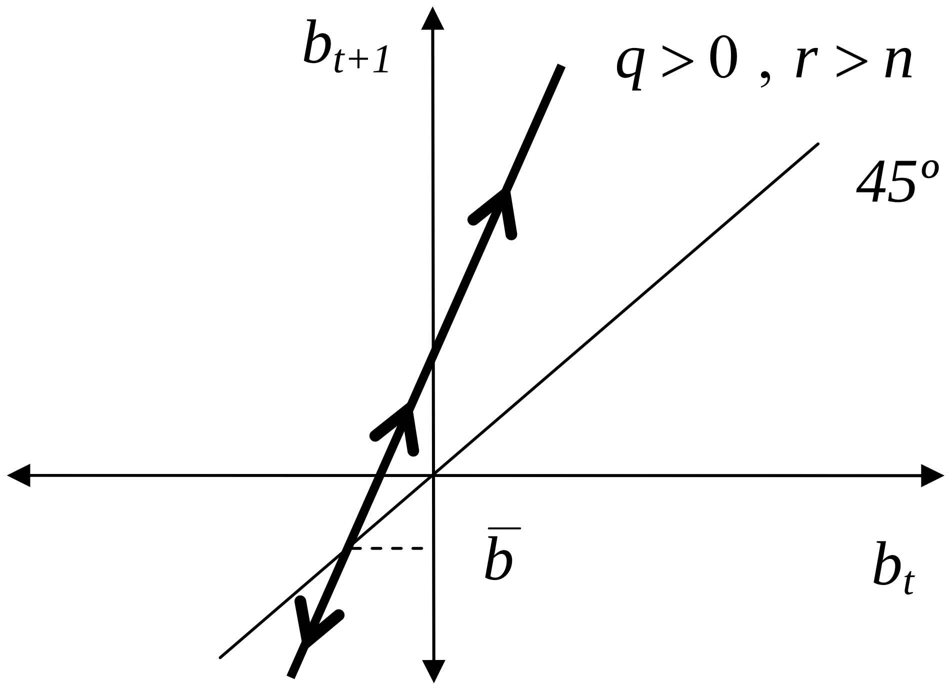
$$Si\;\; n = r\;\; y\;\; q \neq 0 \;\Rightarrow \quad No\;\; existe\;\; \bar{b}$$

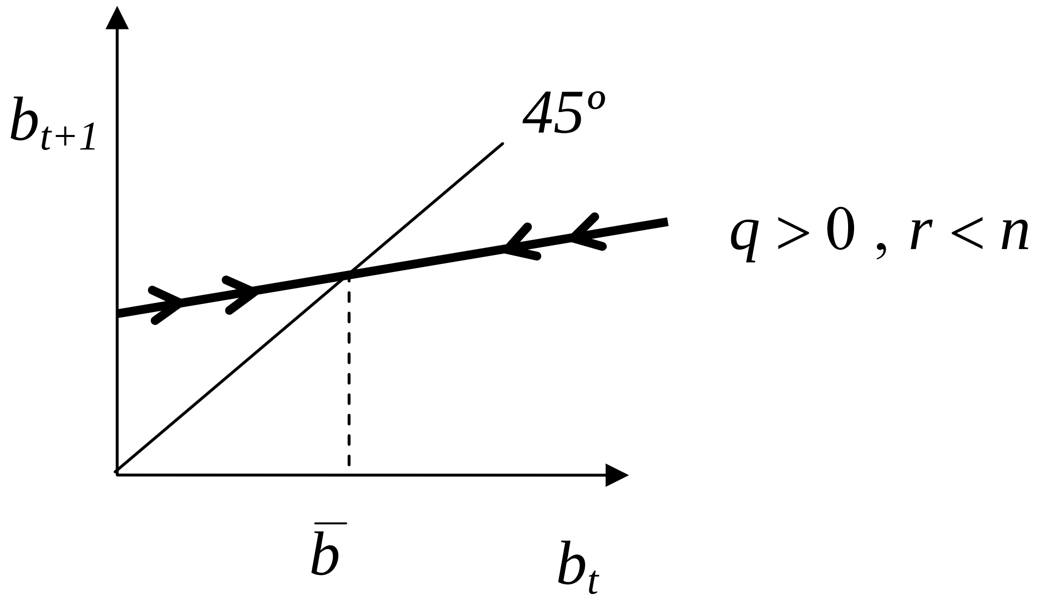
Estabilidad:

a) Inestable si $R > 1 + n$
b) Estable si $R < 1 + n$

Ejemplos:



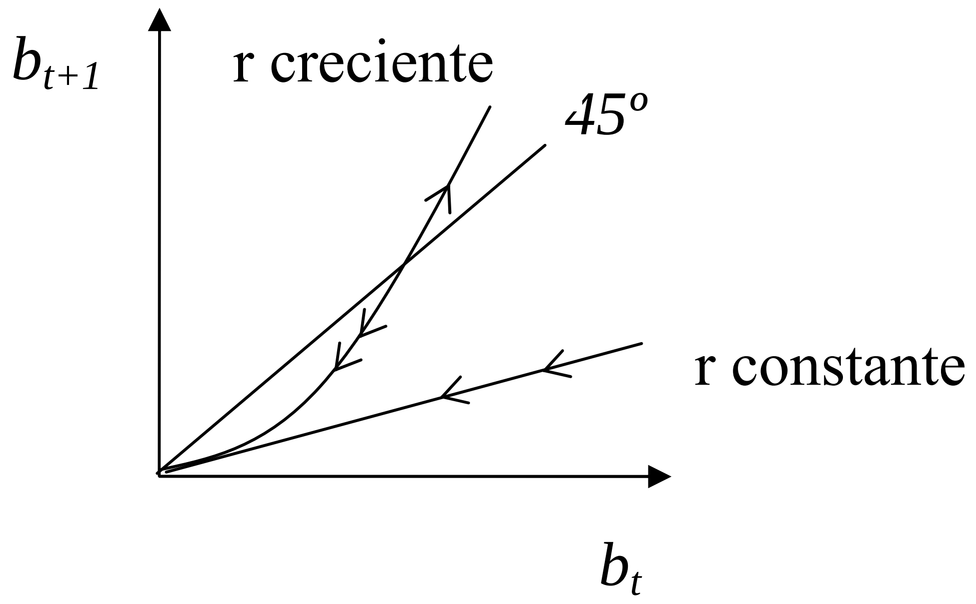

b_{t+1}
$q > 0\ ,\ r > n$
45^o
$\bar{b}$
b_t



b) Sostenibilidad de la política fiscal: R endógena, OLG intercambio, sin déficit primario

Principal resultado: al aumentar la deuda pública, aumenta la demanda de crédito y aumenta la tasa de interés.

Trayectorias de la deuda con R exógena y endógena:



Formalmente: la dinámica de esta economía está dada por dos ecuaciones:

- Restricción presupuestal del gobierno:

$$b_{t+1} = \frac{R_t}{1+n} b_t$$

- Demanda crédito iguala a oferta crédito:

$$(1+n)b_t = Z(R_t, \tau_1, \tau_2)$$

Propiedades de la correspondencia $b_t \to b_{t+1}$:

(i) Pasa por el origen: $b_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_{t+1} = 0$

(ii) Pendiente:

$$\frac{db_{t+1}}{db_t} = \frac{R(b_t, \tau_1, \tau_2)}{1+n} + \frac{b_t}{Z_R(R_t, \tau_1, \tau_2)}$$

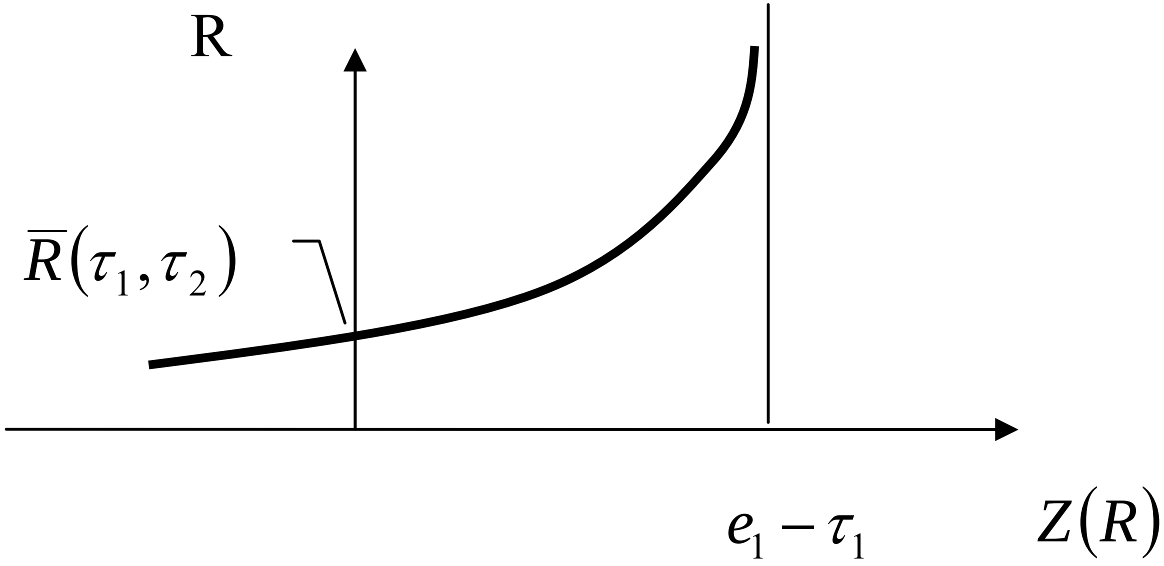
En el origen:

$$\left.\frac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b=0} = \frac{R(0,\tau_1,\tau_2)}{1+n} = \frac{\overline{R}(\tau_1,\tau_2)}{1+n}$$

(iii) La deuda está acotada por el ingreso disponible de los jóvenes:

$$(1+n)b_t = Z(R_t,\tau_1,\tau_2) = e_1 - \tau_1 - \underbrace{C_1^{t-1}}_{\geq 0} \leq e_1 - \tau_1$$

En términos gráficos:



(iv) $\lim\limits_{b_t \to \frac{e_1 - \tau_1}{1+n}} \dfrac{db_{t+1}}{db_t} = \lim\limits_{C_1^{t-1} \to 0} \dfrac{db_{t+1}}{db_t} = \lim\limits_{C_1^{t-1} \to 0} \dfrac{R_t}{1+n} + \dfrac{b_t}{Z_R} = \infty$

Ya que por Euler: $R_t = u_1\left(C_1^{t-1}\right) / u_2\left(C_2^{t-1}\right)$

y por Inada: $\lim\limits_{C_1^{t-1} \to 0} u_1\left(C_1^{t-1}\right) = \infty$

(v) En el estado estacionario:

v.1) *b = 0*, o

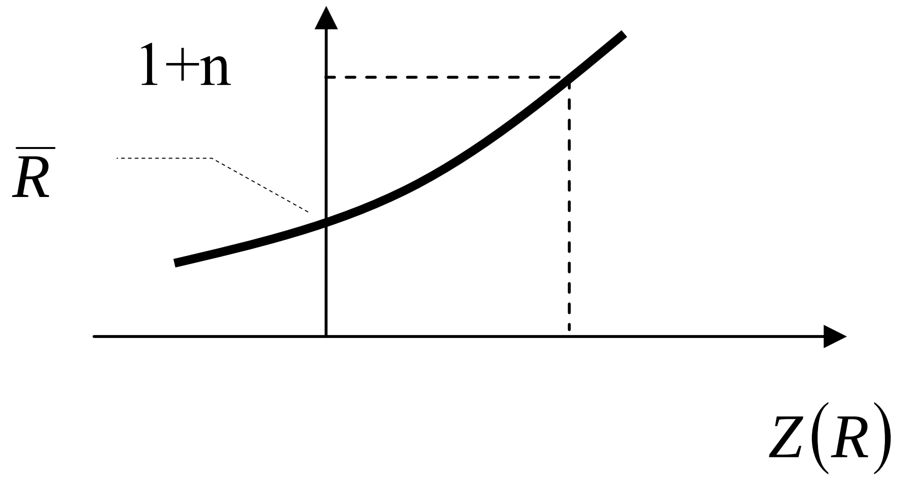
v.2) $Si\ b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad R^* = 1 + n$

Dos casos a distinguir:

a) El caso Samuelson: pendiente en el origen < 1

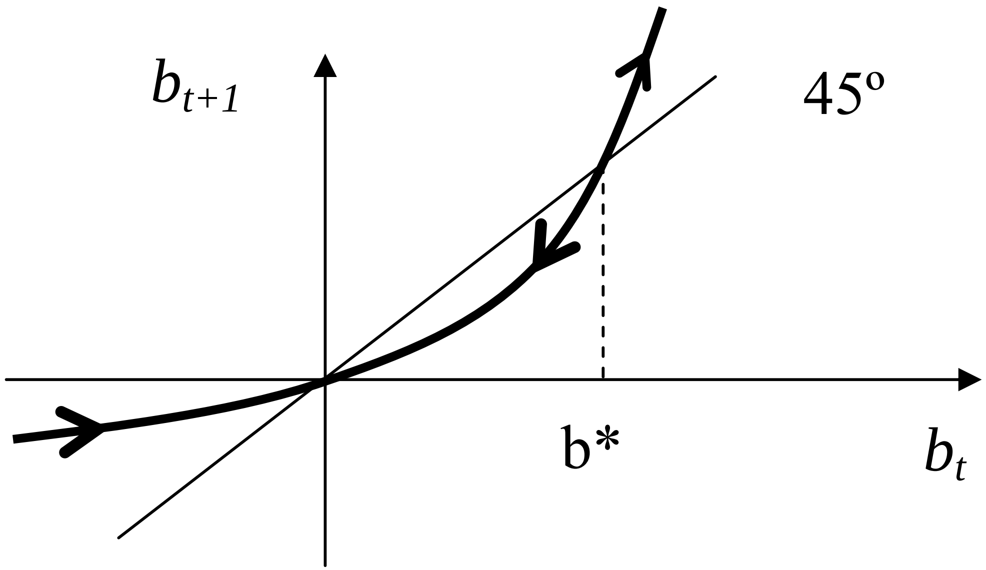
$$\left.\frac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b=0} = \frac{\overline{R}(\tau_1, \tau_2)}{1+n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{r} < n$$

La tasa de interés de autarquía es menor a (1+n):



➔ $Z\left(R = 1 + n, \tau_1, \tau_2\right) > 0$

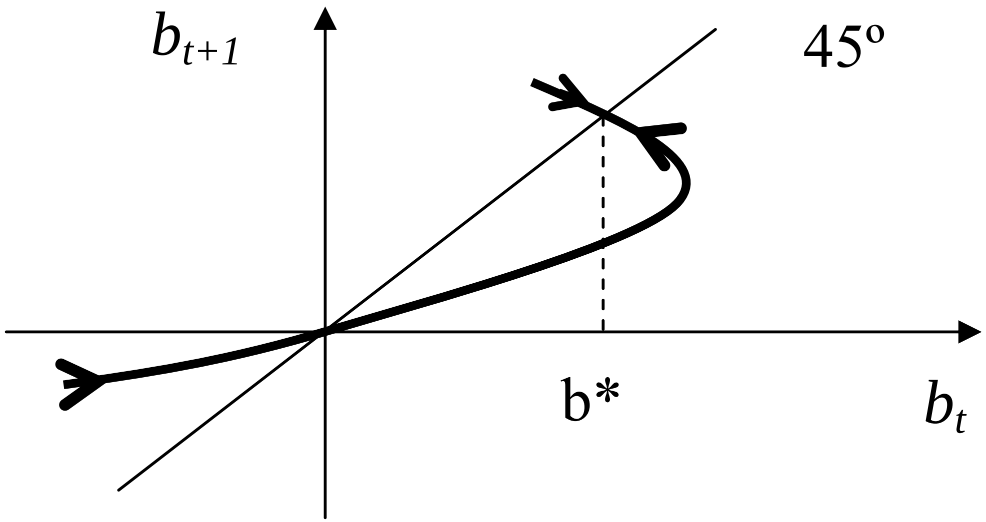
➔ En el estado estacionario no trivial los jóvenes tienen ahorro neto positivo y por lo tanto la deuda del gobierno es positiva.



Hay dos estados estacionarios:
a) $b_t = b_{t+1} = 0$, estable y dinámicamente ineficiente $\left(\bar{r} < n\right)$

b) $b_t = b_{t+1} = Z(1+n, \tau_1, \tau_2)/(1+n)$, dinámicamente eficiente $(r^* = n)$

Estabilidad del estado estacionario con deuda positiva:
b.1) Es inestable si se da la pendiente que pusimos en la figura anterior.
b.2) Es estable (localmente), si los efectos ingreso son suficientemente "fuertes" en el entorno del estado estacionario:



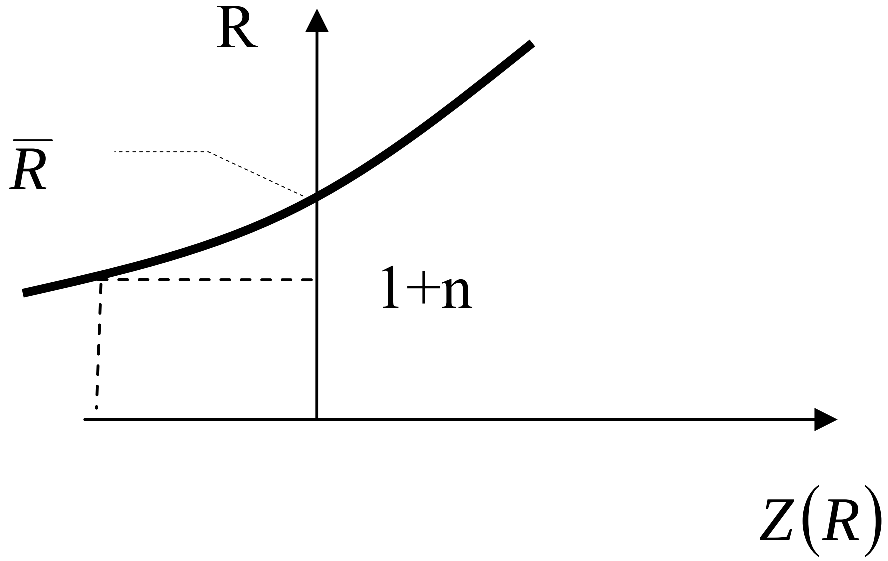
Condición necesaria para que el estado estacionario b* sea estable: $\frac{\partial Z}{\partial R}\left(R=1+n\right)<0$.

Notar: La deuda pública puede eliminar la ineficiencia dinámica!

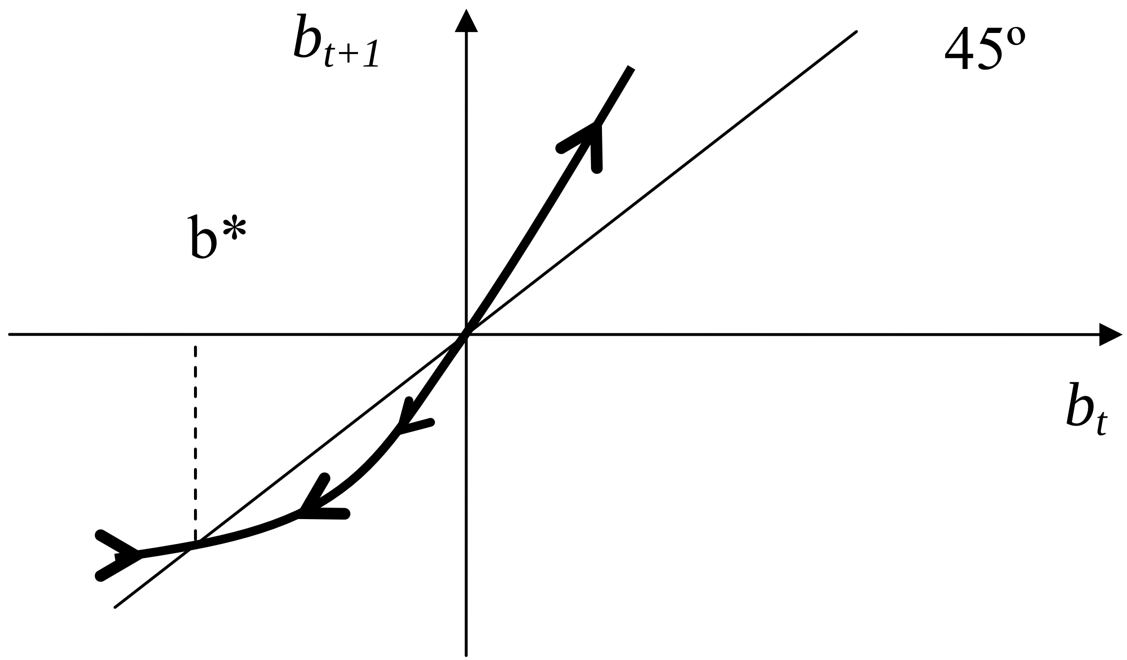
b) El caso clásico: pendiente en el origen > 1

$$\left.\frac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b=0}=\frac{\overline{R}\left(\tau_1,\tau_2\right)}{1+n}>1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{r}>n$$

➔ El origen es un estado estacionario eficiente.



➔ Hay otro estado estacionario eficiente con deuda pública negativa: $b^{*} = Z(1+n,\tau_1,\tau_2)/(1+n) < 0$



En resumen: dos estados estacionarios, ambos eficientes, uno sin deuda pública e inestable y el otro con gobierno acreedor neto y estable.

Deuda es sostenible:

1) Si caso Samuelson y $Z_R > 0$, necesitamos $b_0 \leq Z(1+n, \tau_1, \tau_2)/(1+n)$

2) Si caso Samuelson y $Z_R(1+n, \tau_1, \tau_2) << 0$, puede haber convergencia con deuda inicial mayor a $Z(1+n, \tau_1, \tau_2)/(1+n)$, pero sigue habiendo un umbral tal que con deuda mayor se pierde el control.

3) Si caso clásico, necesitamos $b_0 \leq 0$

c) Sostenibilidad de la política fiscal: R endógena, OLG intercambio, con déficit primario

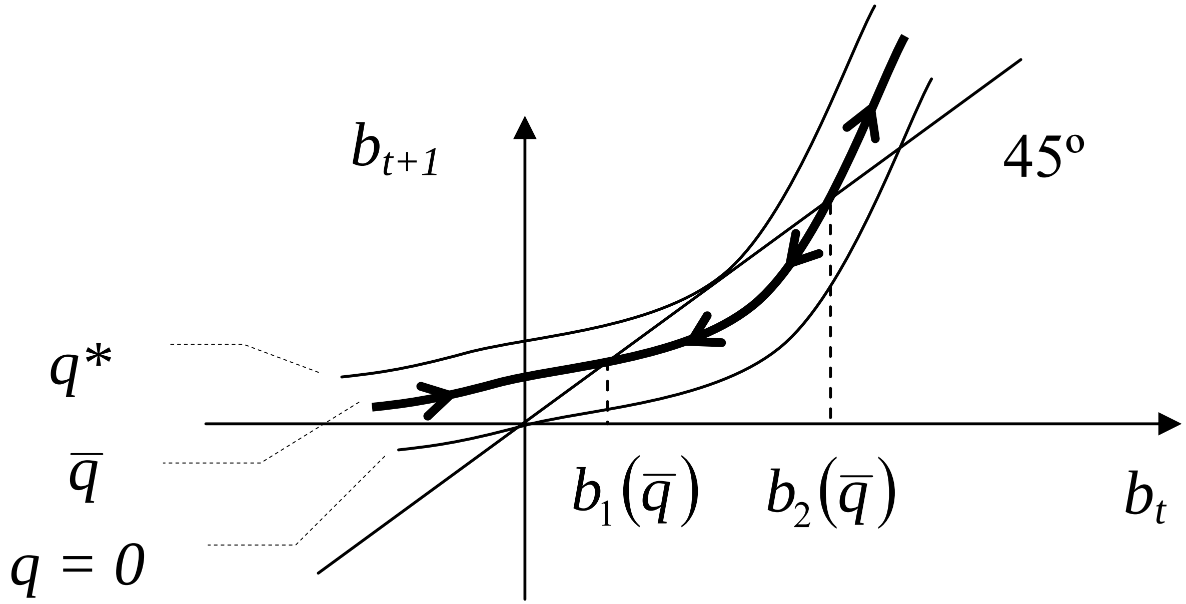
¿Cuál es el déficit máximo compatible con deuda no explosiva?

El sistema dinámico ahora es:

$$b_{t+1} = \frac{R_t}{1+n} b_t + \frac{q}{1+n}$$

$$(1+n)b_t = Z(R_t, \tau_1, \tau_2)$$

Vemos el caso Samuelson:



q* es el mayor déficit primario compatible con deuda no necesariamente explosiva.

$Si\ 0 < q < q^*$, hay dos estados estacionarios con deuda positiva, ambos dinámicamente ineficientes:

$$b = \frac{R}{1+n} b + \frac{q}{1+n} \qquad \Rightarrow \quad (n-r)b = q > 0 \quad \Rightarrow n > r$$

➔ El déficit fiscal provoca ineficiencia dinámica. Si reduzco q a cero, el estado estacionario con deuda positiva es eficiente.

d) Sostenibilidad de la política fiscal: R endógena, OLG con producción, sin déficit primario

Las familias resuelven el siguiente programa:

$$\underset{C_1^t, C_2^t}{Max} \qquad u\left(C_1^t, C_2^t\right)$$

$$sujeto\ a: \quad C_1^t \leq W_t - \tau_1 - Z$$

$$C_2^t \leq R_{t+1} Z - \tau_2$$

$$C_1^t \geq 0 \ \ , \ C_2^t \geq 0$$

La solución de este programa arroja una función de ahorro:

$$Z\left(R_{t+1}, W_t - \tau_1, -\tau_2\right)$$

Las empresas maximizan utilidades cuando:

$$R_t = f'\left(k_t\right) + 1 - \delta$$
$$W_t = f\left(k_t\right) - k_t f'\left(k_t\right)$$

Gobierno: $(1+n)b_{t+1} = R_t b_t + q$

Equilibrio en bienes:

La condición de equilibrio es ahora algo del tipo:

$$S = I + (G - T)$$

Es decir que el ahorro privado se materializa en:
a) Acumulación de bienes.
b) Préstamos al gobierno.

$$\underbrace{L_t Z\left(R_{t+1}, W_t - \tau_1, -\tau_2\right)}_{\text{Ahorro en } t \text{ de la generación } t} = \underbrace{K_{t+1}}_{\text{Capital}} + \underbrace{L_{t+1} b_{t+1}}_{\text{Deuda pública emitida en } t}$$

Notar:

a) Todo el capital existente en *t+1* es propiedad de la generación *t*.

b) Toda la deuda pública emitida en *t* es comprada por la generación *t*.

➔ $Z\left(R_{t+1}, W_t - \tau_1, -\tau_2\right) = (1+n)(k_{t+1} + b_{t+1})$

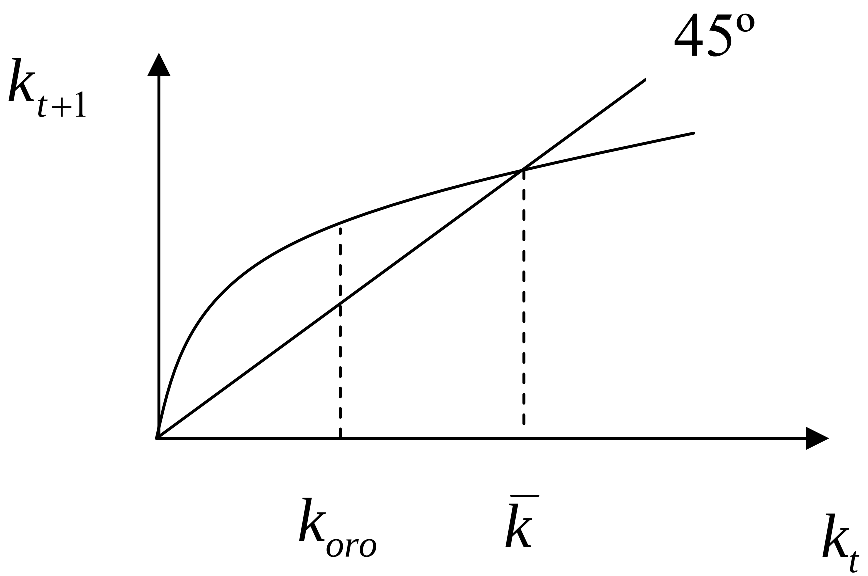
Resumiendo:

$$(1+n)(k_{t+1} + b_{t+1}) = Z\left(R_{t+1}, W_t - \tau_1, -\tau_2\right)$$
$$R_{t+1} = f'(k_{t+1}) + 1 - \delta$$
$$W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$
$$(1+n)b_{t+1} = R_t b_t + q$$

Tenemos un sistema de ecuaciones en diferencia no lineal en *k* y *b*.

Análisis del sistema dinámica con q = 0

Supuesto simplificador: la economía sin deuda tiene la siguiente dinámica:



Suponemos entonces que hay sólo un estado estacionario con capital positivo en la economía sin deuda y ese estado estacionario es ineficiente.

Estados estacionarios del sistema con deuda:
1. $(k = 0,\ b = 0)$
2. $(\bar{k}, 0)$, estado ineficiente (por hipótesis)
3. (k_g, b_g). Esto es "lo nuevo"

Suponemos que $q = 0$ y por lo tanto en este "nuevo" estado estacionario se cumple:

$$(1+n)b = Rb \qquad \Rightarrow \qquad r_g = n$$

➔ El "nuevo" estado estacionario es dinámicamente eficiente.

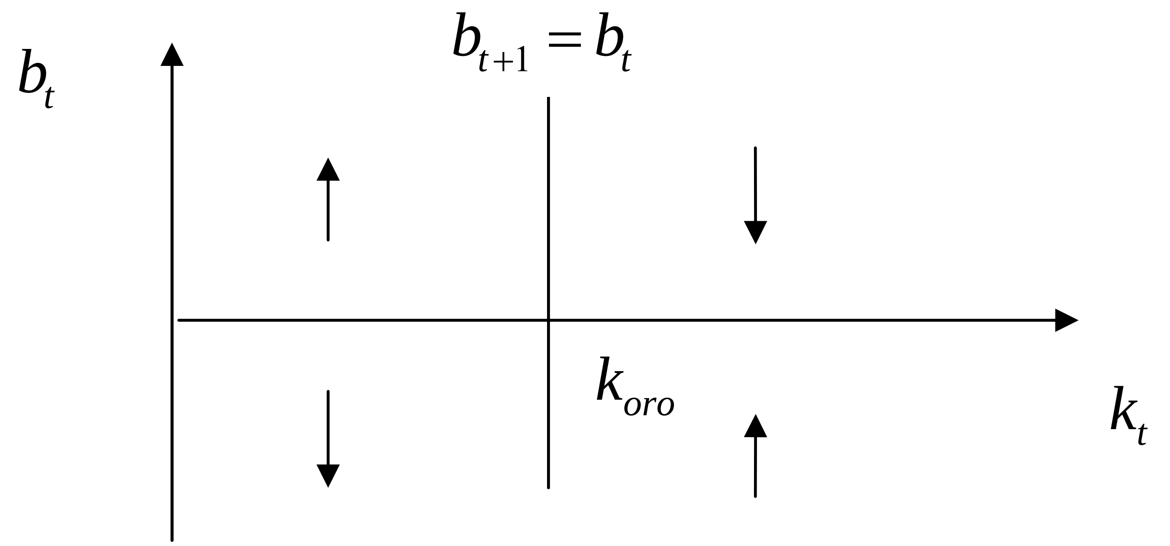
Diagrama de fases:

(i) Lugar de deuda constante (no nula)

$$Si\ \ b_t = b_{t+1} \neq 0\ \ y\ \ q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = r \qquad \Leftrightarrow \quad k = k_{oro}$$

Dinámica de la deuda:

$$Si\ \ k < k_{oro} \quad \Rightarrow \quad r > n \qquad \Rightarrow \quad |b_t| < |b_{t+1}|$$
$$Si\ \ k > k_{oro} \quad \Rightarrow \quad r < n \qquad \Rightarrow \quad |b_t| > |b_{t+1}|$$



(ii) Lugar de capital constante

$$(1+n)k_{t+1} + R(k_t)b_t = Z\left(R(k_{t+1}), W(k_t) - \tau_1, -\tau_2\right)$$

$$k_t = k_{t+1} = k \qquad \Rightarrow \qquad b(k) = \frac{Z\left(R(k), W(k) - \tau_1, -\tau_2\right) - (1+n)k}{R(k)}$$

Nuevo supuesto simplificador: $\tau_1 = \tau_2 = 0$

Caracterizamos el lugar b(k):

(i) $b(0) = 0$, ya que si $\tau_1 = \tau_2 = 0$ entonces $Z(R,0) = 0$

(ii) $b(\bar{k}) = 0,\ \ ya\ que\ Z(R(\bar{k}), W(\bar{k})) = (1+n)\bar{k}$

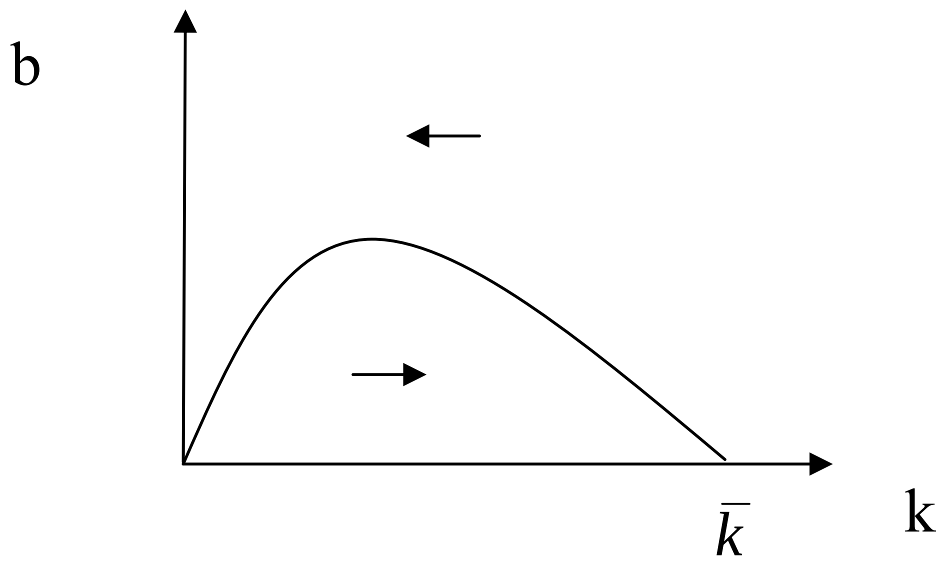
(iii) Estando en el caso representado en la figura de diapositiva 59 tenemos que:

$$0 < k < \bar{k} \quad \Rightarrow \quad Z(\quad) = (1+n)k_{t+1} > (1+n)k_t \Rightarrow b(k) > 0$$

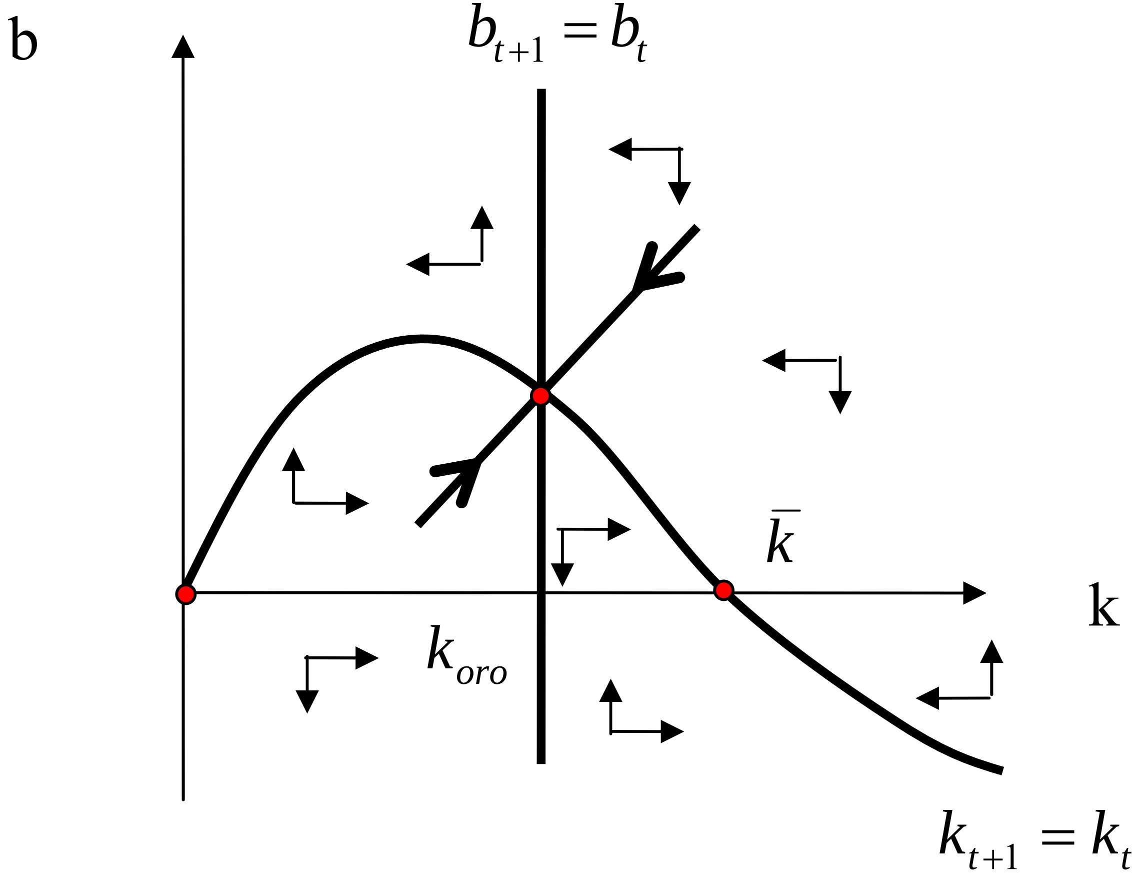
Dinámica:

$$k_{t+1} > k_t \quad \Leftrightarrow \quad b < b(k)$$

$$k_{t+1} < k_t \quad \Leftrightarrow \quad b > b(k)$$



Tenemos entonces el siguiente diagrama de fases:



b
$b_{t+1} = b_t$
$\bar{k}$
k
k_{oro}
$k_{t+1} = k_t$

➔ Tres estados estacionarios:

a) $(0,0)$, inestable ("fuente")
b) (k_{oro}, b_{oro}), estable en sendero de silla
c) $(\bar{k}, 0)$, estable ("pileta" o *sink*)

Senderos de deuda:

a) Sobre el sendero de silla: deuda no explosiva y aumenta el bienestar (se elimina la ineficiencia dinámica del estado estacionario $\bar{k}$).
b) Si b_0 por arriba del sendero de silla: R demasiado alta, deuda crece y k se achica.
c) Si b_0 debajo del sendero de silla: R demasiado baja, deuda crece menos que la población y deuda per capita tiende a cero.