Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República, Uruguay
Maestría en Economía Internacional 2009. Macroeconomía. Alvaro Forteza

Índice de diapositivas en Tr2009_4_Control_Optimo.doc

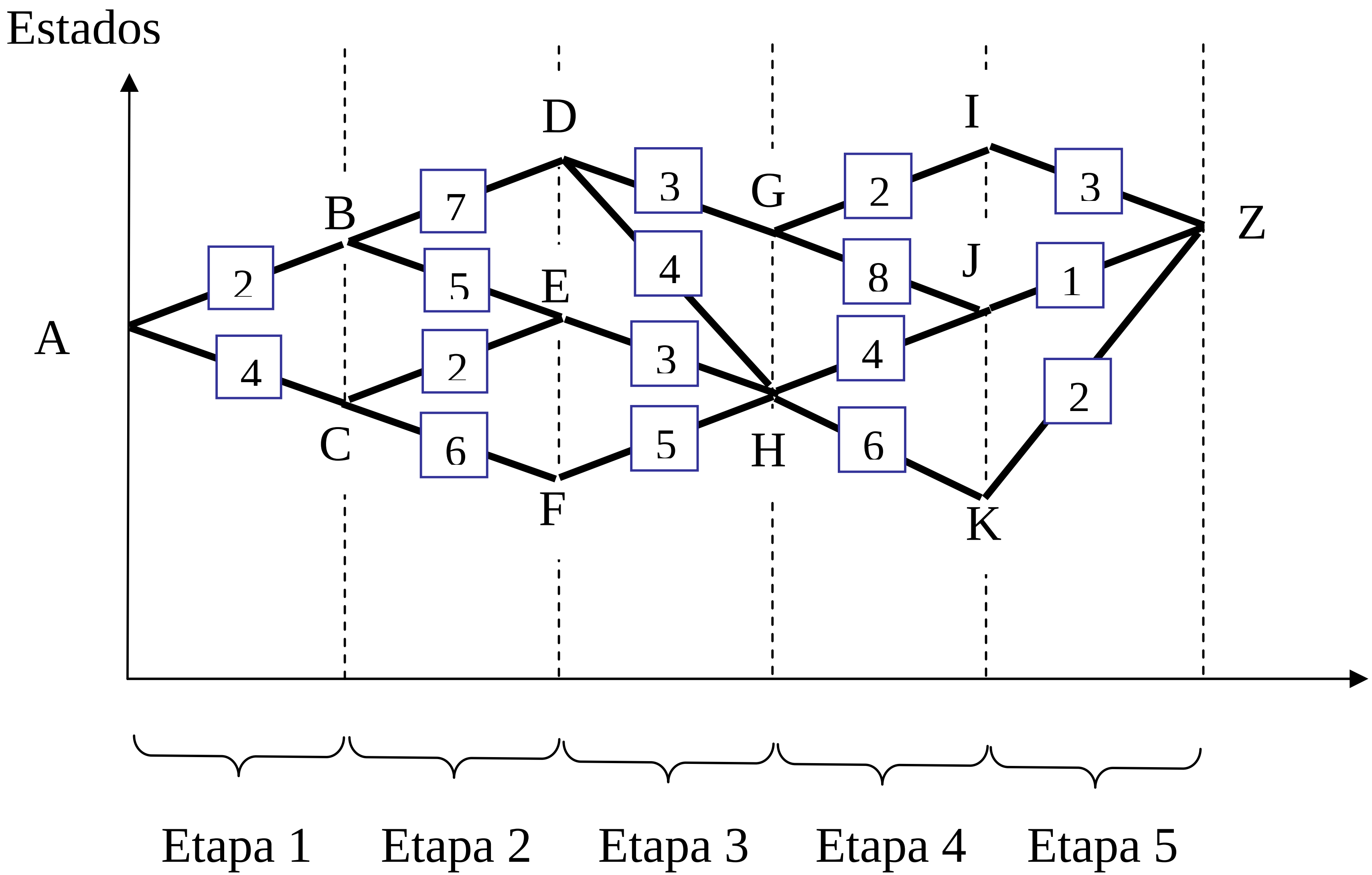
5 Introducción al control óptimo

5.1 Elementos de los problemas de optimización dinámica

5.1.1 Presentación del problema

Es el problema de encontrar senderos óptimos para las variables bajo control.

Ejemplo 1: Una empresa parte de una materia prima A y debe transformarla en el producto final Z. El proceso tiene 5 etapas. En cada etapa hay varias alternativas. ¿Cuál es la selección óptima de tal manera de minimizar el costo total?


Estados
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
Z
2
4
7
5
2
6
3
4
3
5
2
8
4
6
3
1
2
Etapa 1
Etapa 2
Etapa 3
Etapa 4
Etapa 5

Decisión etapa 1: ¿transformar la materia prima A en el estado intermedio B a un costo de $2 o en el estado intermedio C a un costo de $4? En otros términos, ¿se elige el arco AB o AC?

La decisión tiene dos tipos de efectos en el costo total:

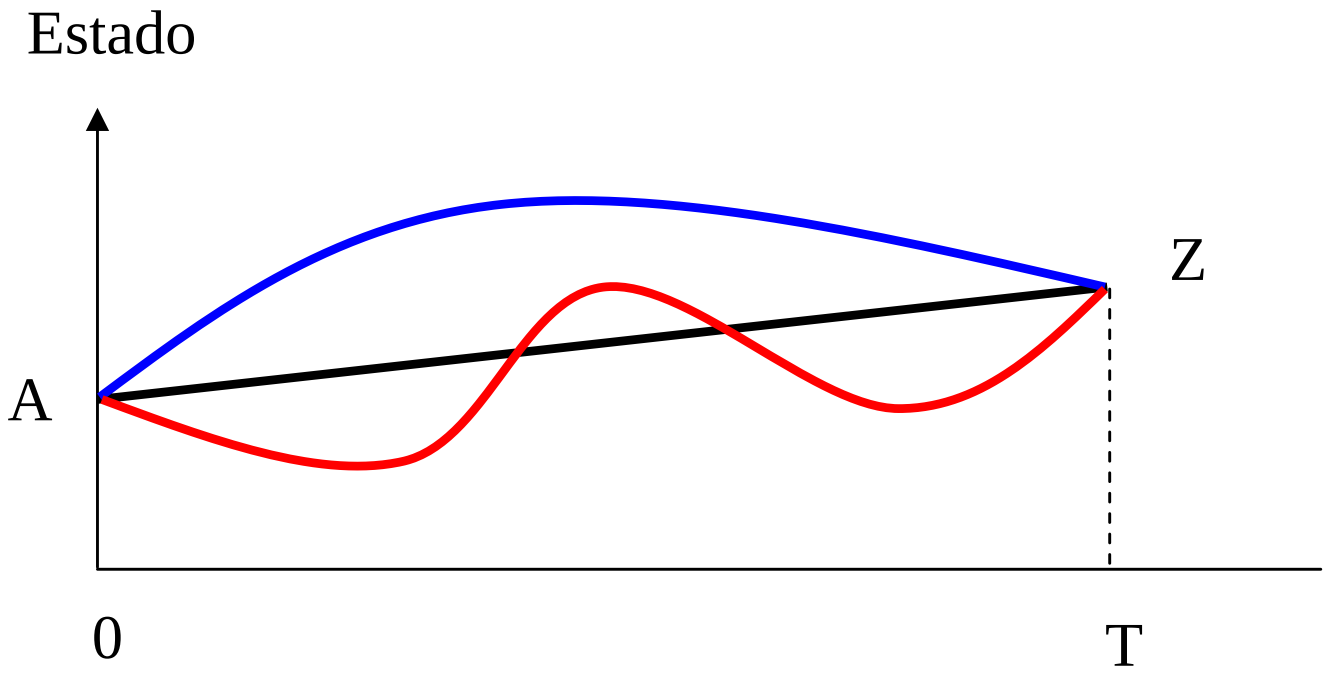
(a) Efecto directo: costo en la etapa es $2 o $4.

(b) Efecto indirecto: las opciones siguientes difieren.

==> No es en general óptimo minimizar el efecto directo sin mirar los indirectos. Eso sería **miopía**. En este ejemplo, se puede mostrar que el sendero óptimo es ACEHJZ.

==> Se debe decidir tomando en cuenta todo el horizonte de planificación.

En tiempo continuo y con continuo de estados:



Ingredientes del problema:

(a) *Punto inicial* dado

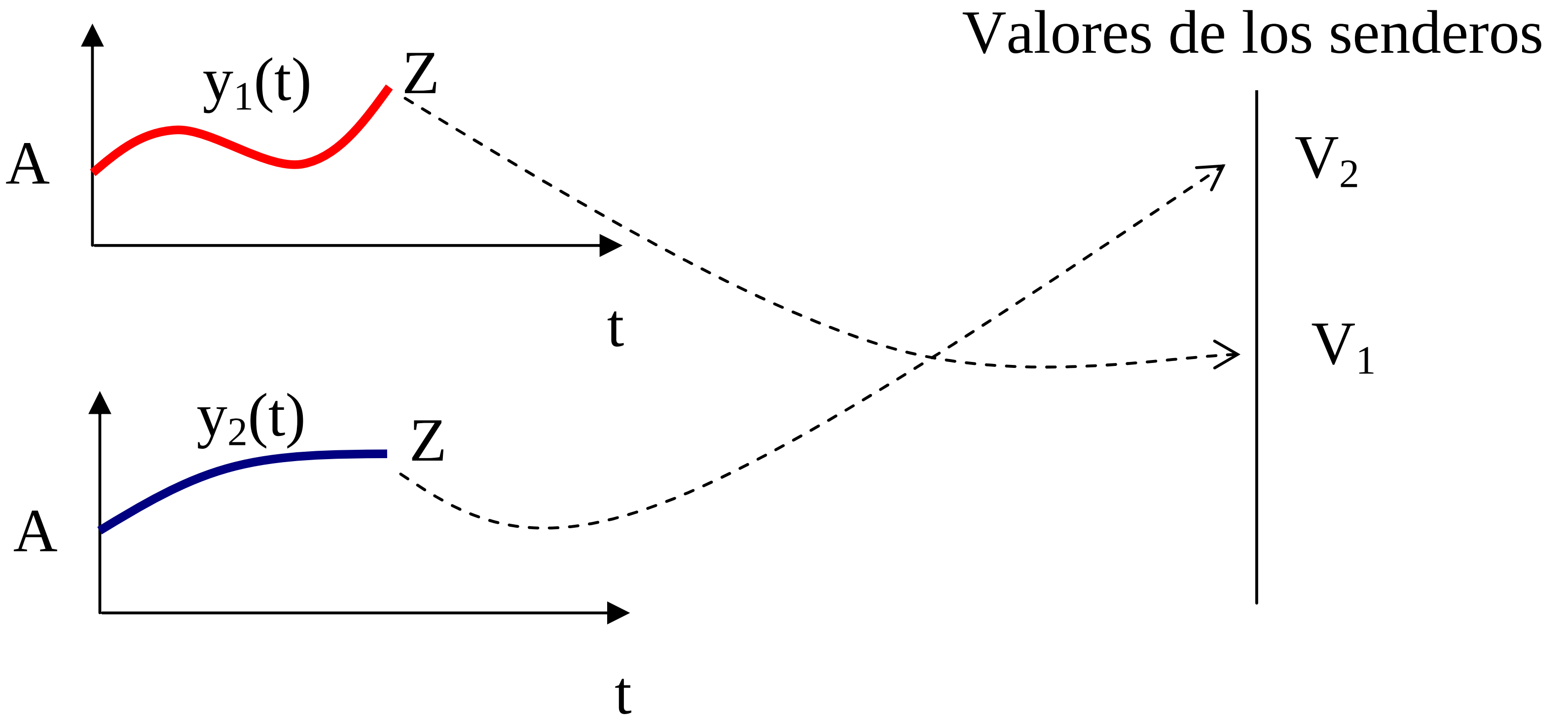
(b) Conjunto de *senderos posibles*

(c) Conjunto de *valores de los senderos*

(d) *Objetivo*: maximizar o minimizar el valor de los senderos.

El concepto de funcional

Funcional = mapa o correspondencia de los *senderos* al *valor de los senderos* = correspondencia de una *curva* a los *reales*.



Funcional = correspondencia de una curva a los reales.
Notación: $V[y(t)]$ o $V[y]$ o $V\{y\}$

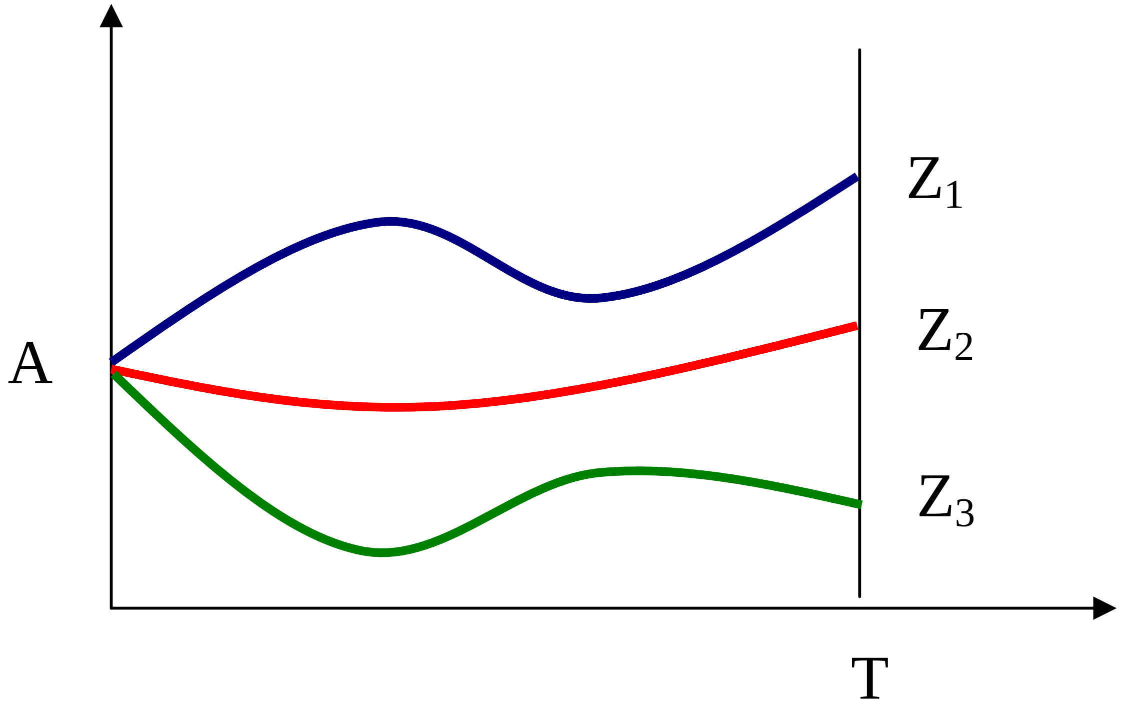
Notar: La funcional *no* es una función de función. **No** está definido un mapa del tipo $t \to y \to V$. El valor V sólo está definido en relación al sendero completo de *y*. Es el objeto *y* el que recibe un valor.

5.1.2 Puntos finales variables y condiciones de transversalidad

En la presentación previa supusimos dados los puntos inicial (0,A) y final (T,Z). En muchos problemas el punto final es más flexible. Varios casos:

(a) Problema de *horizonte temporal dado* = problema de *línea final vertical*. Se fija el horizonte, pero no el estado final.

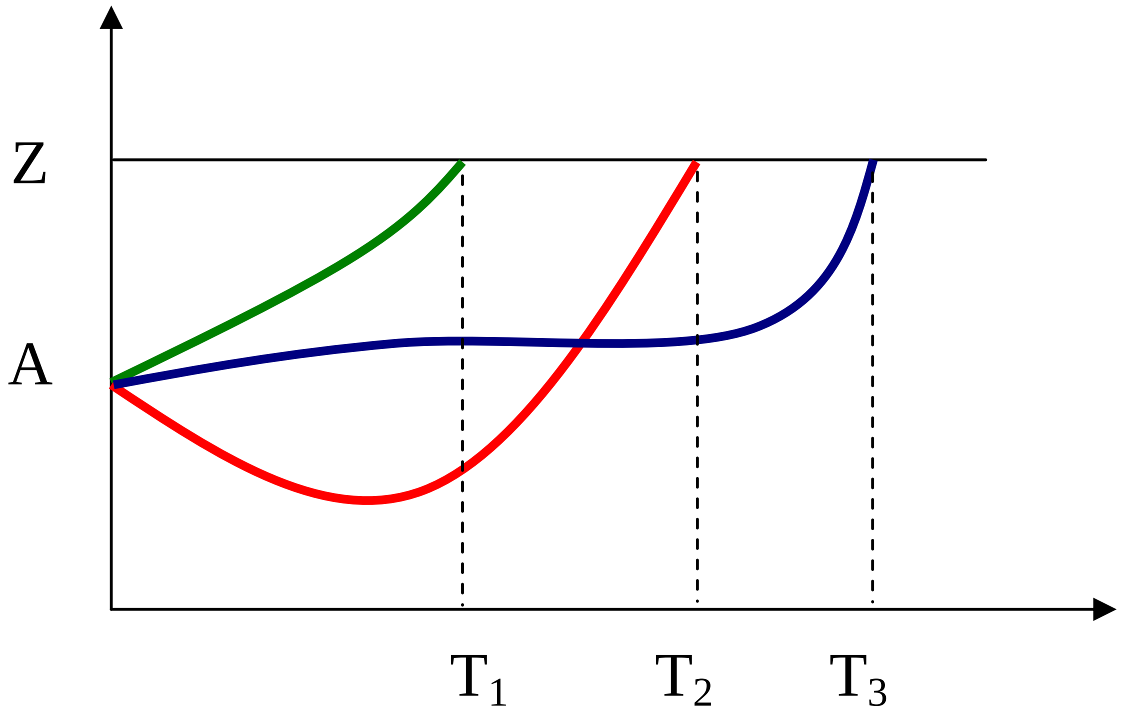
Problema de horizonte temporal dado:



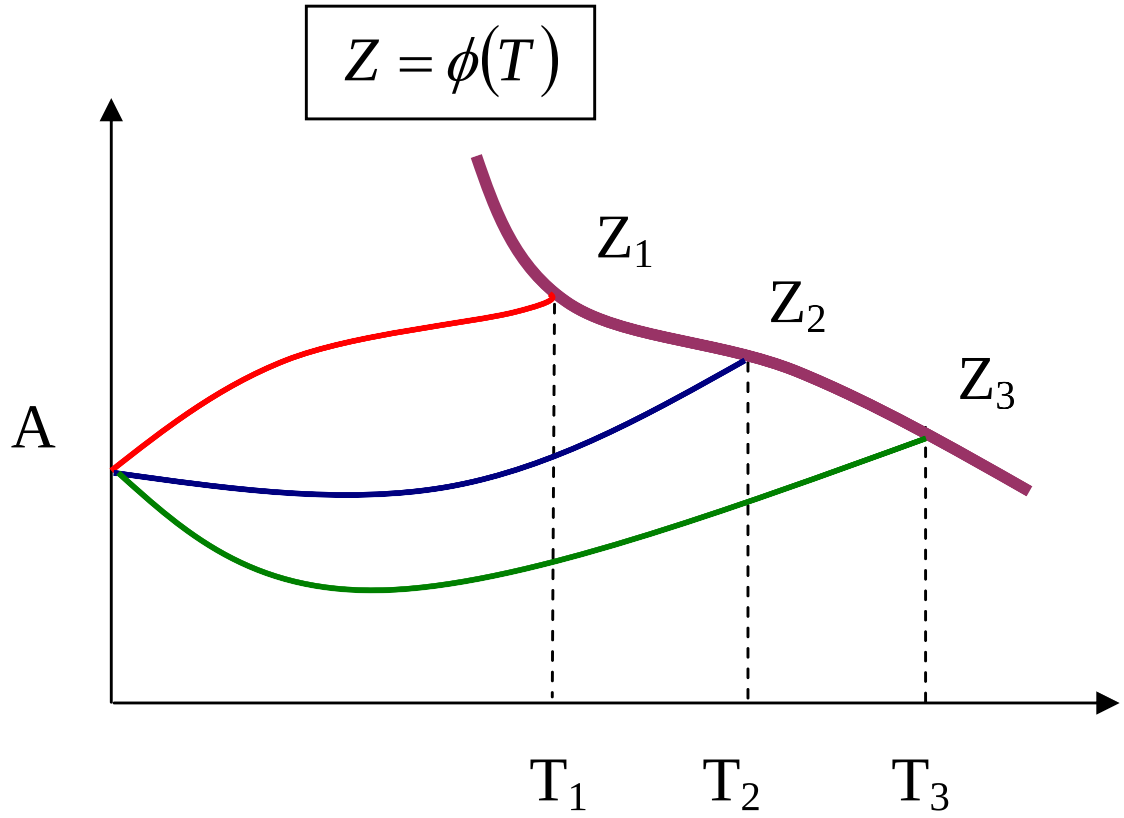
Una variante es el problema de *línea final vertical truncada*: la variable de estado no puede tomar cualquier valor (ejemplo, no puede ser negativa).

(b) Problema de *estado final dado* = problema de *línea final horizontal*. Se fija el estado final, no el horizonte.

Problema de *estado final dado*



(c) Problema de *curva final*.



Condición de transversalidad: los problemas de punto final variable requieren una condición final o condición de transversalidad que permiten seleccionar el sendero óptimo.

5.1.3 La funcional objetivo

El valor del sendero en el primer ejemplo con 5 etapas se obtuvo sumando el costo de cada etapa representada por un *arco* en el diagrama. ¿Cómo se representa el costo asociado al *arco* en un caso de tiempo y estado continuos?

Tres ingredientes para definir el arco:

(a) Tiempo inicial en el arco: t

(b) Estado inicial en el arco: $y(t)$

(c) Dirección del movimiento en el arco: $y'(t)$

==> El valor del arco puede usualmente representarse por la función $F[t, y(t), y'(t)]$

==> La función objetivo es:

$$V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt$$

Ejemplo: Utilidad asociada a un sendero de capital.

$$Y = F(K, L)$$
$$C = Y - I = Y - K'$$
$$U(C)$$

El objetivo es maximizar: $\int_0^T U(C)dt = \int_0^T U(F(K, L) - K')dt$

La “función” de utilidad intertemporal es en realidad una *funcional* que mapea del sendero de capital y trabajo a la utilidad.

5.1.4 Diversas aproximaciones a la optimización dinámica

a) Cálculo de variaciones
b) Control óptimo
c) Programación dinámica

a) Cálculo de variaciones (Newton, Bernoulli, siglo 17)

$$Maximizar \;\; V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]dt$$

$$sujeta \;\; a: \quad y(0) = A \; ; \; y(T) = Z \;\; ; \; A, Z, T \;\; dados$$

En este enfoque se elige directamente la variable de estado *y(t)*.

b) Control óptimo (Pontryagin, 1950s y 1960s)

Se consideran tres tipos de variables:

(i) el tiempo: t

(ii) la o las variables de estado: $y(t)$

(iii) la o las variables de control: $u(t)$

¿Qué es una variable de control? Es una variable que:

(i) Está sujeta al control de quien decide.

(ii) Incide en la variable de estado.

Mientras que el cálculo de variaciones focaliza en la variable de estado, el control óptimo focaliza en la variable de control.

El sendero de la variable de estado debe quedar totalmente determinado a partir de su valor inicial (*y(0)*) y de la variable de control. Es decir que debe existir una ***ecuación de movimiento*** o ***transición***:

$$\frac{dy}{dt} = f\left[t, y(t), u(t)\right]$$

El enfoque de control óptimo permite resolver problemas en que la variable de control tiene restricciones. Con frecuencia, el espacio de controles admisibles *U* es compacto y convexo.

El problema general de control óptimo tiene la forma:

$$\textit{Maximizar} \quad V[u] = \int_0^T F[t, y(t), u(t)]\,dt$$

$$\textit{sujeto a}: \quad y'(t) = f[t, y(t), u(t)]$$

$$u(t) \in U \quad \textit{para} \ 0 \leq t \leq T$$

$$y(0) = A \ ; \ y(T) = Z \ ; \ A, Z, T \ \textit{dados}$$

El problema del cálculo de variaciones es un caso particular del problema de control óptimo con:

(i) Ecuación de movimiento: $y'(t) = u(t)$

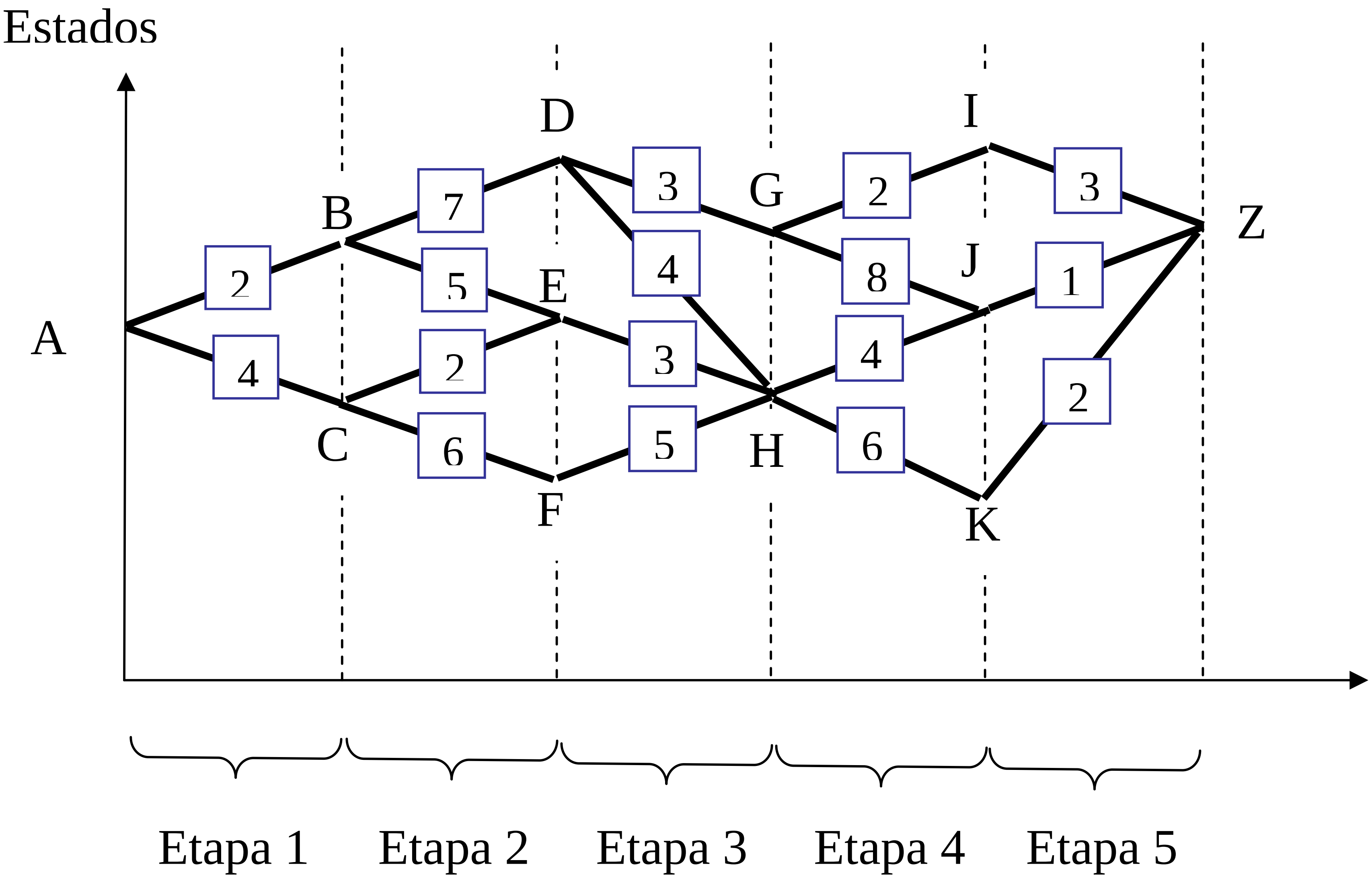
(ii) U es el campo real.

b) Programación dinámica (Bellman 1957)

El foco se pone en el valor óptimo de la funcional V^*.

El problema de control óptimo se descompone en un conjunto de problemas menores que conduce a un ***procedimiento iterativo*** de resolución.

Un ejemplo:


Estados
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
Z
2
4
7
5
2
6
3
4
3
5
2
8
4
6
3
1
2
Etapa 1
Etapa 2
Etapa 3
Etapa 4
Etapa 5

Descomponemos el problema de encontrar el procedimiento (sendero) menos costoso para transformar A en Z en problemas más chicos: ¿cuál es el procedimiento menos costoso para transformar *i=A, B, ..., Z* en *Z*?

Empezamos por la etapa 5: caso trivial, dado que tenemos un único camino para transformar *I*, *J* o *K* en *Z*. Los valores óptimos de la funcional de valor en este caso son:

$$V^*(I) = 3 \; ; \; V^*(J) = 1 \; ; \; V^*(K) = 2$$

Etapa 4: Tenemos que encontrar $V^*(G) \; y \; V^*(H)$. Usando los resultados de la etapa 5, tenemos que:

$$V^*(G) = \min\{valor\ arco\ GI + V^*(I)\ ;\ valor\ arco\ GJ + V^*(J)\}$$
$$= \min\{2+3;8+1\} = 5$$

==> El sendero óptimo de G a Z es GIZ.

$$V^*(H) = \min\{valor\ arco\ HJ + V^*(J)\ ;\ valor\ arco\ HK + V^*(K)\}$$
$$= \min\{4+1;6+2\} = 5$$

==> El sendero óptimo de H a Z es HJZ.

Siguiendo con este procedimiento, se encuentra el sendero óptimo de A a Z.

Principio de optimalidad de Bellman: si $y^*[0,T]$ es el sendero óptimo entre *0* y *T*, entonces $y^*[t,T], 0 \leq t \leq T$, es el sendero óptimo entre *t* y *T*.

Aplicado a nuestro ejemplo:

(i) Si EHJZ es el sendero óptimo que conduce de E a Z, entonces HJZ es el sendero óptimo de H a Z; y

(ii) si HJZ es el sendero óptimo de H a Z, todo sendero óptimo para llegar a Z *que pase por H* debe incluir el sendero HJZ.

5.2 Control óptimo y el principio del máximo

(Chiang 2000, capítulos 7 y 8)

El problema de control óptimo más simple es el de tiempo final dado y estado final libre:

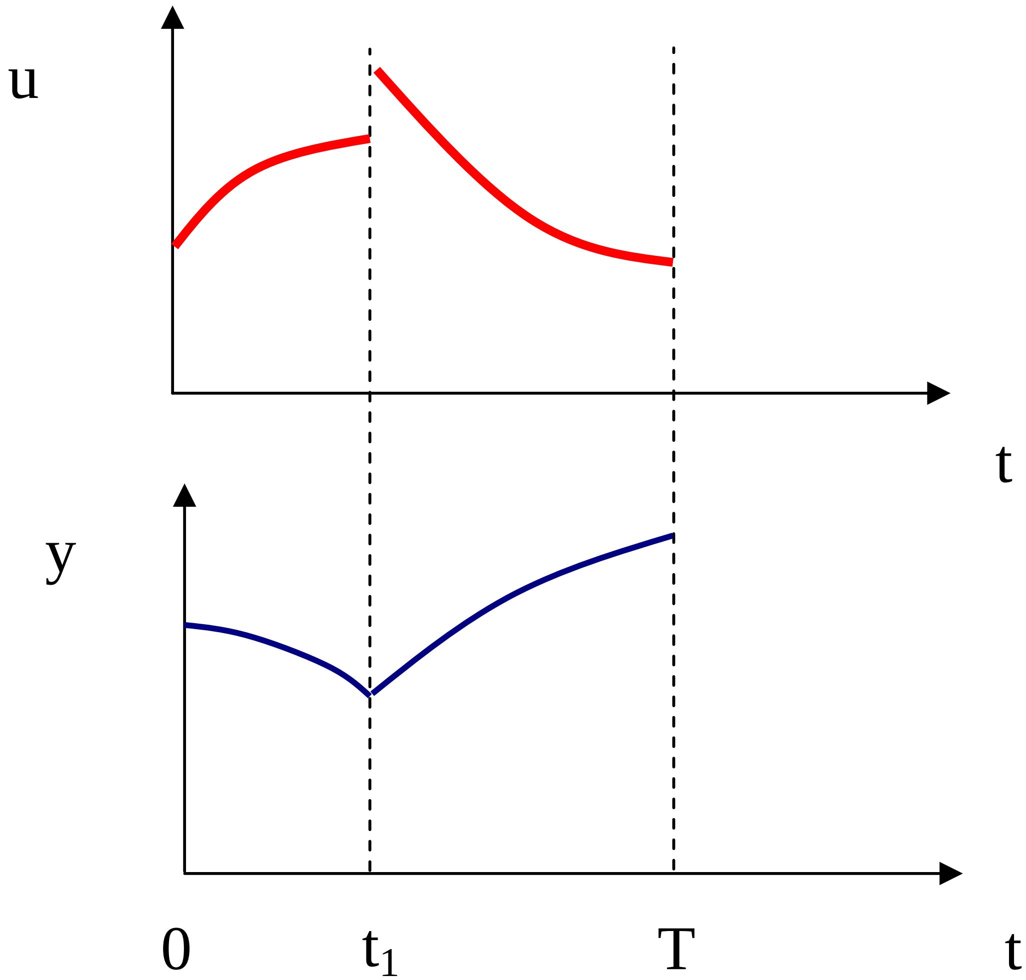
$$\underset{u}{Maximizar} \;\; V[u] = \int_0^T F(t, y(t), u(t))\,dt$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a: \quad & \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ & u(t) \in U \quad para\ 0 \le t \le T \\ & y(0) = A\ ;\ y(T)\ libre\ ;\ A, T\ dados \end{aligned}$$

(1)

Supuestos:
1) F() y f() son continuas.
2) F() y f() tienen primeras derivadas parciales respecto a t y y continuas. Pueden no tener derivada continua en u.
3) $u(t)$ puede no ser continua, sólo se requiere que sea continua por tramos.
4) $y(t)$ es continua, pero su derivada sólo tiene que ser diferenciable por tramos ($y(t)$ admite puntos angulosos).

En el siguiente ejemplo, $u(t)$ tiene una discontinuidad en t_1. El punto inicial de la variable de estado en el tramo $\left[t_1, T\right]$ es el punto final de la variable de estado en el tramo $\left[0, t_1\right]$ ==> $y(t)$ no tiene discontinuidad en t_1, pero tiene un punto anguloso debido al salto de $u(t)$.


u
t
y
0
t1
T
t

El principio del máximo

Plan de la exposición siguiente:
a) Introducimos dos conceptos: variable de coestado y Hamiltonianios.
b) Presentamos el principio del máximo sin demostrarlo.
c) Presentamos algunos ejemplos simples.
d) Fundamentos del principio del máximo (=demostración informal).

a) La variable de coestado y la función Hamiltoniana

Se define el Hamiltoniano o función Hamiltoniana como:

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \equiv F(t, y(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, y(t), u(t))$$

$\lambda(t)$ es la variable de coestado.

La variable de coestado es similar a un multiplicador de Lagrange, pero variable en el tiempo.

b) El principio del máximo

Condiciones necesarias de la solución de (1):

$$\underset{u}{Max}\ H\left(t,y,u,\lambda\right)\ \ \forall t\in\left[0,T\right]$$

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad \textit{Ecuación de movimiento de } y$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \textit{Ecuación de movimiento de } \lambda$$

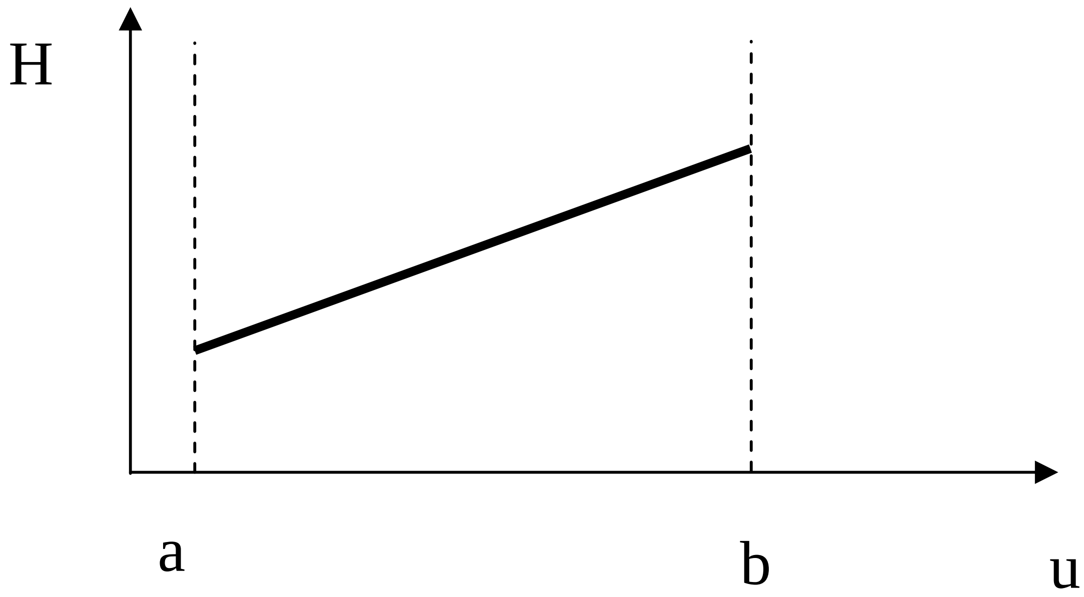
$$\lambda\left(T\right)=0 \qquad \textit{Condición de transversalidad}$$

Notas:

(i) Estas condiciones son necesarias, pero no suficientes.

(ii) La solución puede no ser interior y, por lo tanto, la maximización del Hamiltoniano no necesariamente implica $\partial H / \partial u = 0$.

Ejemplo: $u \in U = [a, b]$



c) Algunos ejemplos simples

Ejemplo 1:

$$Max\ V = \int_0^T -\left(1+u^2\right)^{1/2} dt$$

$$sujeto\, a: \quad \dot{y} = u$$

$$y(0) = A\ ;\ y(T)\ libre\ ;\ A, T\ \ dados$$

Paso 1: Buscamos el máximo del Hamiltoniano en *u*.

El Hamiltoniano en este caso es:

$$H = -\left(1+u^2\right)^{1/2} + \lambda u$$

Notar:
(i) *u* no está acotada, así que la solución tiene que ser interior.
(ii) El Hamiltoniano es cóncavo.

==> Maximizamos el Hamiltoniano haciendo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)^{-1/2}(2u) + \lambda = 0$$

==> $$u(t) = \lambda\left(1-\lambda^2\right)^{-1/2}$$

Esta ecuación nos da *u(t)* en función de lambda. El próximo paso es entonces determinar lambda.

Paso 2: Determinamos el sendero de la variable de coestado.

El principio del máximo establece que: $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$

En este ejemplo: $\partial H / \partial y = 0 \Rightarrow \lambda(t) = cte$

Lo cual, unido a la condición de transversalidad, implica que:

$$\lambda^*(t) = 0 \quad \rightarrow \quad u^*(t) = 0$$

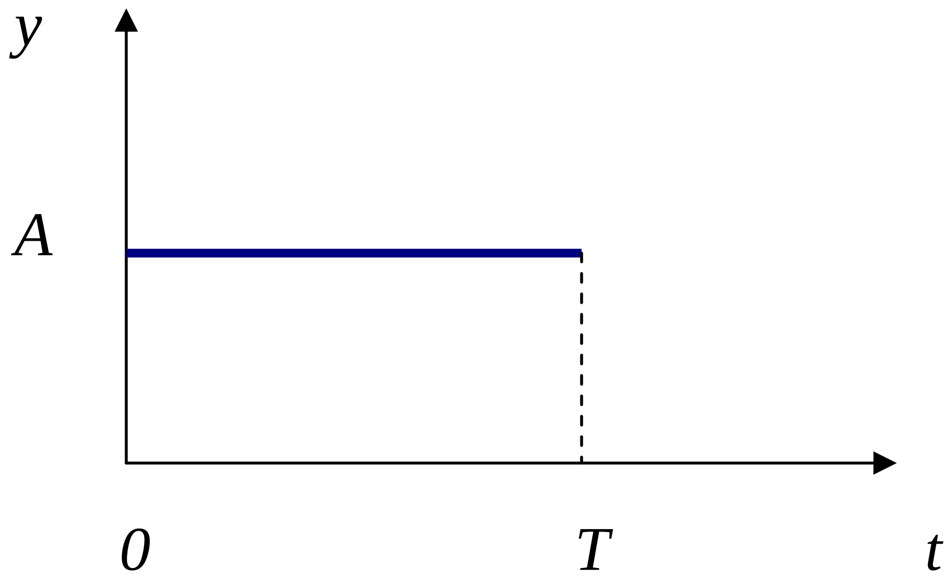
Paso 3: Determinamos el sendero de la variable de estado.

De la ecuación de movimiento:

$$\dot{y} = u = 0 \;\Rightarrow\; y(t) = cte$$

Lo cual unido a la condición inicial $\left(y(0) = A\right)$ implica que:

$$y^*(t) = A \;\; ; \;\; t \in [0, T]$$



Ejemplo 2: ver Alpha Chiang (2000, p 173)

d) Fundamentos del principio del máximo

Empezamos considerando un problema que:
(i) Tiene solución interior (*u** es interior)
(ii) El hamiltoniano es diferenciable en *u*.

➔ u* se obtiene usando la condición $\partial H / \partial u = 0$.

(iii) Punto inicial dado, tiempo final dado, valor final del estado libre (problema de línea final vertical).

$$\underset{u}{Max}\ V = \int_0^T F(t, y, u)\,dt$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a: \quad & \dot{y} = f(t, y, u) \\ & y(0) = y_0 \ \ dado \end{aligned}$$

Derivamos (informalmente) el principio del máximo en cuatro pasos:

Paso 1: Desarrollo de la funcional y el Hamiltoniano

De la ecuación de movimiento sabemos que: $f(t, y, u) - \dot{y} = 0$

Por lo tanto, se cumple que: $\int_0^T \lambda(t)[f(t, y, u) - \dot{y}]dt = 0$

Definimos una nueva funcional:

$$V_2 = V + \int_0^T \lambda(t)[f(t, y, u) - \dot{y}]dt$$

$$= \int_0^T \{F(t, y, u) + \lambda(t)[f(t, y, u) - \dot{y}]\}dt$$

Por construcción: $V_2 = V$

Definimos el Hamiltoniano:

$$H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u)$$

Con lo cual podemos reescribir la funcional V_2 como:

$$V_2 = \int_0^T H(t, y, u, \lambda) dt - \int_0^T \lambda(t) \dot{y} dt$$

Integramos por partes el último sumando, definiendo las variables auxiliares: $v = \lambda(t)$; $w = y(t)$

➔ $v' = \dot{\lambda}(t)$; $w' = \dot{y}(t)$

A su vez, la derivada del producto vw es:

$$(vw)' = v'w + vw' \rightarrow vw' = (vw)' - v'w$$

Y sustituyendo:

$$\lambda(t)\dot{y} = [\lambda(t)y(t)]' - \dot{\lambda}y(t)$$

Integrando:

$$-\int_0^T \lambda(t)\dot{y}dt = -[\lambda(t)y(t)]\Big|_0^T + \int_0^T \dot{\lambda}y(t)dt$$

$$= -\lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) + \int_0^T \dot{\lambda}y(t)dt$$

Con lo cual la nueva funcional objetivo es:

$$V_2 = \underbrace{\int_0^T \left[H(t, y, u, \lambda) + y(t)\dot{\lambda}\right]dt}_{\Omega_1} \underbrace{- \lambda(T)y(T)}_{\Omega_2} \underbrace{+ \lambda(0)y(0)}_{\Omega_3}$$

(2)

Se trata de maximizar la funcional objetivo. V_2 depende de las variables: (i) de estado, (ii) de control y (iii) de coestado y de los valores T y $y(T)$.

Paso 2: Condiciones de la variable de coestado

¿Cómo incide $\lambda(t)$ en V_2? En la medida en que se cumple la ecuación de movimiento $\dot{y} = f(t, y, u)$, λ no incide en V_2. Tenemos entonces la condición:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \forall t \in [0, T]$$

Paso 3: Perturbamos el sendero óptimo

Sea $u^*(t)$ una solución del problema de control óptimo y $p(t)$ una "curva de perturbación" de ese sendero. Podemos generar senderos vecinos al óptimo:

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon p(t)$$

La ecuación de movimiento implica entonces perturbaciones en la variable de estado:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon\, q(t)$$

Si *T* y *y(T)* fueran variables tendríamos también:

$$T = T^* + \varepsilon \Delta T \quad ; \quad y_T = y_T^* + \varepsilon \Delta y_T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{d\varepsilon} = \Delta T \;\; ; \;\; \frac{dy_T}{d\varepsilon} = \Delta y_T$$

(3)

Podemos entonces escribir la funcional de valor como función de ε:

$$V_2 = \int_0^{T(\varepsilon)} \left[H\left(t, y^* + \varepsilon q(t), u^* + \varepsilon p(t), \lambda\right) + \dot{\lambda}\left(y^* + \varepsilon q(t)\right)\right] dt$$
$$-\lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0)$$

Paso 4: Imponemos la condición $dV_2 / d\varepsilon = 0$

$$\frac{dV_2}{d\varepsilon} = \int_0^{T(\varepsilon)} \left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) + \dot{\lambda} q(t) \right] dt$$

$$+ \left[H + \dot{\lambda} y \right]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} - \lambda(T) \frac{dy_T}{d\varepsilon} - y_T \frac{d\lambda(T)}{dT} \frac{dT}{d\varepsilon}$$

Usando (3):

$$\frac{dV_2}{d\varepsilon} = \int_0^{T(\varepsilon)} \left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) + \dot{\lambda} q(t) \right] dt$$

$$+ \left[H + \dot{\lambda} y \right]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T - y_T \dot{\lambda}(T) \Delta T$$

Cancelando y reordenando tenemos que la condición del óptimo es:

$$\frac{dV_2}{d\varepsilon} = \int_0^{T(\varepsilon)} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda} \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] dt + [H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0$$

(4)

Esta condición tiene tres sumandos que dependen de tres cosas independientes y arbitrarias:
Sumando 1: las curvas perturbadoras $p(t), q(t)$
Sumando 2: ΔT
Sumando 3: Δy_T

➔ Cada uno de los tres sumandos debe igualarse a cero en el óptimo.

Para que el primer sumando (la integral) sea cero para perturbaciones arbitrarias debe cumplirse que:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

La primera es la condición de movimiento de la variable de coestado. La segunda es la condición de maximización del Hamiltoniano en *u* cuando la solución es interior.

A su vez, en el problema de línea final vertical $\Delta T = 0$

Finalmente, para asegurar que $\lambda(T)\Delta y_T = 0$ debe verificarse la condición de transversalidad:

$$\lambda(T) = 0$$

Diferentes condiciones finales

Si la condición final no es una línea vertical, la condición de transversalidad se modifica.

(i) Punto final fijo

La condición de transversalidad se sustituye por

$$y(T) = y_T \quad ; T, y_T \ dados$$

(ii) Línea final horizontal

y_T está dado, pero T es libre. Analizando (4) se concluye que la condición de transversalidad resulta en este caso:

$$[H]_{t=T} = 0$$

(iii) Curva final

Si $y_T = \phi(T)$, entonces hay una relación entre Δy_T y ΔT:

$$\Delta y_T = \phi'(T)\Delta T$$

Usando esta condición en el último sumando en (4) y combinando los dos últimos sumandos:

$$[H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta y_T = ([H]_{t=T} - \lambda(T)\phi'(T))\Delta T$$

Entonces, para asegurar la condición (4) para ΔT arbitrario, la condición de transversalidad debe ser:

$$[H]_{t=T} - \lambda(T)\phi'(T) = 0$$

(iv) Línea final vertical truncada

Consideremos el caso en que el estado final está restringido:

$$y_T \geq y_{\min}$$

Hay dos posibilidades:
Si $y_T^* > y_{\min}$, estamos en el caso anterior y la condición de transversalidad es: $\lambda(T) = 0$
Si $y_T^* = y_{\min}$, se puede demostrar que la condición de transversalidad resulta ser:

$$\lambda(T) \geq 0 \quad ; \quad y_T \geq y_{\min} \quad ; \quad (y_T - y_{\min})\lambda(T) = 0$$

Es decir que tenemos una condición de holgura tipo Kuhn-Tucker.

(v) Línea final horizontal truncada

En este caso, el tiempo final tiene un límite: $T \leq T_{\max}$

Se puede mostrar que la condición de transversalidad en este caso es:

$$[H]_{t=T} \geq 0 \quad ; \quad T \leq T_{\max} \quad ; \quad (T - T_{\max})[H]_{t=T} = 0$$

5.3 Una interpretación económica del principio del máximo

- Consideramos una empresa que maximiza beneficios en el intervalo $[0,T]$.
- Controla una variable u (publicidad, política de inventarios, etc.) que incide en (i) utilidades y (ii) tasa de acumulación de capital.

El problema que enfrenta la empresa es entonces:

$$\text{Maximizar} \quad \Pi = \int_0^T \pi(t, K, u)dt$$

$$\text{sujeto a}: \quad \dot{K} = f(t, K, u)$$

$$K(0) = K_0 \ ; \ K(T) \ \text{libre} \ ; \ K_0, T \ \text{dados}$$

5.3.1 La variable de coestado como un precio sombra

Recordemos la ecuación (2):

$$V_2 = \int_0^T \left[H(t, y, u, \lambda) + y(t)\dot{\lambda}\right]dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0)$$

La funcional objetivo para el problema de la empresa y evaluada en los senderos óptimos es:

$$\Pi^* = \int_0^T \left[H\left(t, K^*, u^*, \lambda^*\right) + K^*(t)\dot{\lambda}^*\right]dt$$

$$-\lambda^*(T)K^*(T) + \lambda^*(0)K(0)$$

➔ $$\frac{\partial \Pi^*}{\partial K(0)} = \lambda^*(0) \quad ; \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial K(T)} = -\lambda^*(T)$$

Por lo tanto:

(i) $\lambda^*(0)$ es el precio sombra de $K^*(0)$ = **aumento** marginal de beneficios que se obtendría (en el óptimo) con un aumento infinitesimal del capital **inicial**.

(ii) $\lambda^*(T)$ es el precio sombra de $K^*(T)$ = **disminución** (signo menos) marginal de beneficios que se obtendría (en el óptimo) con un aumento infinitesimal del capital **final**.

5.3.2 El Hamiltoniano y los beneficios futuros

El Hamiltoniano del problema de la empresa es:

$$H = \pi(t, K, u) + \lambda(t) f(t, K, u)$$

Primer sumando = $\pi(t, K, u)$ = efecto de u en el beneficio **actual**.

Segundo sumando = $\lambda(t) f(t, K, u)$ = efecto de u en el beneficio **futuro**.

Usualmente, los cambios de *u* que aumentan el beneficio actual reducen el futuro y viceversa.

El principio del máximo establece que se debe maximizar el Hamiltoniano en *u*, es decir que la empresa maximiza el beneficio total (actual y futuro).

En el caso de solución interior, el principio del máximo implica que:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial \pi}{\partial u} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

➔ $$\frac{\partial \pi}{\partial u} = -\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial u}$$

Es decir que en el sendero óptimo la empresa iguala cualquier aumento marginal del beneficio actual con una disminución marginal del beneficio futuro.

5.3.3 La ecuación de movimiento de la variable de coestado

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial K} = \frac{\partial \pi}{\partial K} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial K}$$

El lado izquierdo es la ***velocidad de disminución*** del precio sombra del capital.
El lado derecho es la ***contribución marginal del capital a la utilidad*** (actual y futura) de la empresa.

5.3.4 Condiciones de transversalidad

Consideremos tres variantes del problema de la empresa:

1) Capital final *K(T)* libre y *T* dado.

La condición de transversalidad es:

$$\lambda(T) = 0$$

➔ En el sendero óptimo, el precio sombra del capital al final debería llevarse a cero.

2) Capital final mínimo K_{min} y T dado.

La condición de transversalidad es:

$$\lambda(T) \geq 0 \quad ; \quad \left[K^*(T) - K_{\min}\right]\lambda(T) = 0$$

Notar: cuando la restricción es operativa, el precio sombra del capital en *T* puede ser positivo.

3) Capital final dado y fecha final libre

En este caso, la empresa ***elige la fecha final T.***
La condición de transversalidad es:

$$\left[H\right]_{t=T} = 0$$

➔ la empresa elige la fecha final de tal forma que la suma de beneficios actuales y futuros en ese momento sea cero.

5.4 El Hamiltoniano en valor corriente

En muchas aplicaciones económicas tendremos un factor de descuento involucrado:

$$F(t, y, u) = G(t, y, u)e^{-\rho t}$$

El problema de control óptimo puede escribirse entonces como:

$$Maximizar \quad V = \int_0^T G(t, y, u)e^{-\rho t}dt$$

$$sujeto \ a: \quad \dot{y} = f(t, y, u)$$

$$condiciones \ inicial, \ final, etc.$$

Dado el factor de descuento, el Hamiltoniano estándar está expresado en términos del momento 0:

$$H = G(t, y, u)e^{-\rho t} + \lambda f(t, y, u)$$

Resulta conveniente definir un Hamiltoniano y una variable de coestado en términos del momento *t*:

$$H_c = He^{\rho t} = G(t, y, u) + mf(t, y, u)$$

$$m = \lambda e^{\rho t}$$

Es inmediato mostrar que las condiciones del óptimo en términos del Hamiltoniano y variable de coestado en valor corriente son:

$$\underset{u}{Max}\ H_c \qquad (5)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial m} \tag{6}$$

$$\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m \tag{7}$$

Condiciones de transversalidad si el problema tiene:

(i) Línea final vertical:

$$m(T)e^{-\rho T} = 0$$

(ii) Línea final horizontal:

$$\left[H_c\right]_{t=T} e^{-\rho T} = 0$$

5.5 Condiciones suficientes

Hemos visto hasta ahora condiciones necesarias del óptimo. Enunciamos ahora algunas condiciones suficientes.

5.5.1 El teorema de Mangasarian

Consideremos nuevamente el problema:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar \quad V = \int_0^T F(t, y, u)dt \\
&sujeto\ a: \quad \dot{y} = f(t, y, u) \\
&\qquad\qquad\quad y(0) = y_0 \;\; ; \;\; y_0, T \;\; dados
\end{aligned}
$$

(8)

Las condiciones necesarias del principio del máximo son también suficientes para un máximo global de *V* si:

1) *F* y *f* son diferenciables y cóncavas en *(y,u)*.

2) En la solución se verifica que:
$\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$ si *f* es no lineal en *y* o en *u*.
No hay restricción en el signo de λ si *f* es lineal en *y* y en *u*.

Demostración: ver Chiang (2000, pp 214-7)

5.5.2 El teorema de Arrow

Consideramos el mismo problema (8).
Definimos el *Hamiltoniano maximizado*:

$$H^0(t,y,\lambda) = F(t,y,u^*) + \lambda f(t,y,u^*)$$

Donde u^* es el sendero óptimo de la variable de control, pero y no es y^* ➔ H^0 no es el Hamiltoniano evaluado en el óptimo.

Enunciado: Las condiciones necesarias del problema (8) son también suficientes para un óptimo global si el Hamiltoniano maximizado es cóncavo en la variable de estado para $t \in [0, T]$.

5.6 Horizonte infinito

Hay tres complicaciones adicionales al considerar horizonte infinito:

a) Convergencia de la funcional objetivo
b) Condiciones de transversalidad en horizonte infinito
c) Condiciones suficientes para un óptimo

5.6.1 Convergencia de la funcional objetivo

La funcional objetivo tiene la forma:

$$V = \int_0^\infty F(t, y, u)dt$$

Puede existir una solución al problema de control óptimo aún cuando $V \to \infty$, pero el problema es complejo y no lo trataremos.

Algunas condiciones suficientes para la convergencia de *V*:

Condición 1: Existe t_0 tal que $F(t, y, u) = 0 \;\; \forall t \geq t_0$

Condición 2: La funcional objetivo tiene la forma:

$$F(t,y,u) = G(t,y,u)e^{-\rho t} \;\; ; \;\; \rho > 0 \; ; \; G(.) \leq \hat{G}$$

Se trata entonces de un “problema de valor descontado”, en el que *G(.)* está acotada. Se verifica que:

$$\int_0^{\infty} G(t,y,u)e^{-\rho t}dt \;\leq \int_0^{\infty} \hat{G}e^{-\rho t}dt \;= \frac{\hat{G}}{\rho}$$

5.6.2 Condiciones de transversalidad en horizonte infinito

Existe alguna controversia respecto a las condiciones de transversalidad en horizonte infinito (Chiang 2000, capítulo 9).

Para derivar el principio del máximo en horizonte finito usamos la ecuación (4):

$$\frac{dV_2}{d\varepsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] dt$$
$$+ [H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0$$

Adaptado al horizonte infinito:

$$\frac{dV_2}{d\varepsilon} = \underbrace{\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] dt}_{\Omega_1}$$
$$\underbrace{+ \lim_{t \to \infty} H \Delta T}_{\Omega_2} \underbrace{- \lim_{t \to \infty} \lambda(t) \Delta y_T}_{\Omega_3} = 0$$

Para satisfacer esta condición, los tres términos deben anularse individualmente (dado que las perturbaciones son arbitrarias). Las condiciones de transversalidad surgen de la anulación de los últimos dos términos.
Con horizonte infinito:

1) El tiempo final no es fijo ➔

$$\Delta T \neq 0 \;\Rightarrow\; \Omega_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} H = 0$$

Notar: esta condición de transversalidad es necesaria en problemas de horizonte infinito, *con independencia de si el estado final es fijo*.

Interpretación económica: Recordar que $H(t, y, u, \lambda)$ es el valor actual y futuro de los beneficios a partir de t. En problemas con tiempo final libre, se elige T tal que no hay ganancias futuras, es decir tal que $H_T = 0$. Lo mismo vale para horizonte infinito.

En el caso de un problema de valor corriente con horizonte infinito, esta condición toma la forma de valor presente:

$$\lim_{t\to\infty} \left[H_c\right]_t e^{-\rho t} = 0 \tag{9}$$

Acemoglu (2009, teorema 7.13) muestra que, bajo ciertas condiciones adicionales, la condición de que el valor presente del Hamiltoniano tienda a cero en el infinito implica que, en el sendero óptimo, se cumplirá también que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m^*(t) y^*(t) = 0$$

(10)

2) Si el estado final es fijo:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta y_t = 0 \;\Rightarrow\; \Omega_3 = 0$$

Notar: en este caso **no** hay restricciones sobre la variable de coestado.

3) Si el estado final es libre:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta y_t \neq 0 \;\Rightarrow\; \Omega_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$$

Notar: en este caso la variable de coestado debe tender a cero a medida que t tiende a infinito.

En un problema de valor corriente, esta condición de transversalidad sería:

$$\lim_{t \to \infty} m(t) e^{-\rho t} = 0$$

Comentario: No siempre es obvio si esta condición debe o no cumplirse. Hay casos en que la condición no se cumple, a pesar de que el problema es aparentemente de estado final libre (el ejemplo de Halkin, en Chiang 2000, p 244-7 y el ejemplo 7.2 y ejercicio 7.19 en Acemoglu 2009). Chiang argumenta que en realidad el problema de Halkin tiene un estado final fijo implícito. Creo que puede decirse lo mismo del ejemplo 7.2 y del ejercicio 7.19 de Acemoglu. En todo caso, el tema está en debate…

5.6.3 Condiciones suficientes en problemas de valor descontado con horizonte infinito

Acemoglu (2009, teorema 7.14) propone condiciones suficientes que “en esencia” incluyen:

(i) Condición del teorema de suficiencia de Arrow: el Hamiltoniano “maximizado” debe ser cóncavo en la variable de estado:

$$H_c^0(t,y,m) = G(t,y,u^*) + mf(t,y,u^*) \tag{11}$$

Es decir que H_c^0 debe ser cóncavo en y.

(ii) todos los senderos factibles de la variable de estado verifican la siguiente condición:

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}m^{*}(t)y(t)\right]\geq 0 \tag{12}$$

Notar:
(i) La variable de coestado está evaluada en el sendero óptimo.
(ii) Esta condición *suficiente* es diferente de la condición *necesaria* para el óptimo (10) que reproduzco aquí:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}m^{*}(t)y^{*}(t)=0$$

Intuición: la condición de transversalidad (10) nos lleva a elegir el menor valor de la variable de estado en el conjunto factible definido por **(12)** cuando el horizonte tiende a infinito.

➔ “Receta” sugerida por Acemoglu (2009, p 258) para problemas de valor descontado con horizonte infinito:

(i) Identificar un candidato para una solución usando las condiciones necesarias (5), (6), (7) y (9).

(ii) Verificar la concavidad del Hamiltoniano maximizado (concavidad de (11)) y verificar que se cumple (12), con lo cual tenemos las condiciones suficientes.