

Índice de diapositivas en Tr2009_6_Prog_Din.doc

7	Programación dinámica.....	2
7.1	Optimización en tiempo discreto y horizonte infinito.....	2
7.2	Programación dinámica estacionaria.....	5

7 Programación dinámica

7.1 Optimización en tiempo discreto y horizonte infinito

Consideramos el siguiente programa:

$$\sup_{\{x(t), y(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tilde{U}(t, x(t), y(t))$$

$$\text{sujeto a: } y(t) \in \tilde{G}(t, x(t)) \quad ; \quad t \geq 0$$

$$x(t+1) = \tilde{f}(t, x(t), y(t)) \quad ; \quad t \geq 0$$

$$x(0) \text{ dado}$$

donde: $x(t)$ = variable de estado ; $y(t)$ = variable de control

$\tilde{G}(t, x(t))$ es una *correspondencia* que nos dice cuál es el conjunto de los valores factibles de la variable de control en t , dada la variable de estado $x(t)$.

El problema anterior puede reescribirse eliminando la variable de control:

Problema 6.1:

$$V^*(0, x(0)) = \sup_{\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(t, x(t), x(t+1))$$

sujeto a : $x(t+1) \in G(t, x(t))$; $t \geq 0$
 $x(0)$ *dado*

Donde:

$V^*(0, x(0)) =$ *función de valor* = valor obtenido cuando se adopta la estrategia óptima partiendo del punto $x(0)$ en $t=0$.

Ejemplo: Problema de crecimiento óptimo

$$\text{Max}_{\{k(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

$$\text{sujeto a : } k(t+1) = f(k(t)) + (1 - \delta)k(t) - c(t) \quad ; \quad t \geq 0$$
$$k(t) \geq 0 \quad ; \quad c(t) \geq 0 \quad ; \quad k(0) > 0 \text{ dado}$$

El problema de crecimiento óptimo puede escribirse fácilmente bajo el formato 6.1:

$$\text{Max}_{\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k(t)) + (1 - \delta)k(t) - k(t+1))$$

$$\text{sujeto a : } k(t+1) \in [0, f(k(t)) + (1 - \delta)k(t)] \quad ; \quad t \geq 0$$
$$k(t) \geq 0 \quad ; \quad k(0) > 0 \text{ dado}$$

Notar: en este caso, las funciones U y G no dependen directamente del tiempo = problema estacionario.

7.2 Programación dinámica estacionaria

La forma estacionaria del problema 6.1 es el problema 6.2:

Problema 6.2 (formulación secuencial):

$$V^*(x(0)) = \sup_{\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x(t), x(t+1))$$

sujeto a : $x(t+1) \in G(x(t))$; $t \geq 0$

$x(0)$ *dado*

Formulación secuencial: se trata de encontrar la secuencia infinita de $x(t)$.

Idea básica de la programación dinámica: transformar el *problema secuencial* en uno *recursivo*, en el cual no se busca una secuencia infinita de $x(t)$ sino la función $V(x)$.

Problema 6.3:

$$V(x) = \sup_{y \in G(x)} \{U(x, y) + \beta V(y)\}; \quad \text{para todo } x \in X$$

La función de valor $V()$ aparece en los dos lados de la *ecuación de Bellman* y queda definida entonces en forma *recursiva*.

El problema 6.3 es sólo una reformulación del problema 6.2:

$$\begin{aligned} V^*(x(0)) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x^*(t), x^*(t+1)) \\ &= U(x^*(0), x^*(1)) + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(x^*(s+1), x^*(s+2)) \\ &= U(x^*(0), x^*(1)) + \beta V^*(x^*(1)) \end{aligned}$$

donde: $x^*(t)$ es la secuencia óptima de $x(t)$.

Una vez que se determina la función de valor, es sencillo encontrar la función de política $y = \pi(x)$. La función de política queda definida implícitamente por:

$$V(x) = U(x, \pi(x)) + \beta V(\pi(x)); \quad \text{para todo } x \in X$$

Teoremas de la programación dinámica estacionaria

Queremos determinar condiciones de equivalencia entre las formulaciones secuencial y recursiva del problema de programación dinámica en el sentido que toda solución de una sea solución de la otra.

Principio de optimalidad: si $x^*(t)$, $t = 0 \dots \infty$, resuelve el problema secuencial, entonces deberá cumplirse:

$$V(x^*(t)) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta V(x^*(t+1)); \quad t = 0, 1, \dots$$

A su vez, toda solución de esta ecuación recursiva deberá dar el supremo del problema 6.2.

Es decir que el retorno de un plan óptimo puede partirse en dos partes:

- (i) el retorno del período actual y
- (ii) la suma descontada de los retornos futuros a partir del estado del próximo período.

Acemoglu (2009, secciones 6.3 a 6.5) demuestra el principio de optimalidad y otros resultados vinculados: existencia de soluciones, unicidad, concavidad, monotonidad y diferenciabilidad de la función de valor.

Condiciones necesarias y suficientes de un sendero óptimo:

(Acemoglu 2009, teorema 6.10)

Mostraremos que la solución del programa de optimización puede caracterizarse por dos conjuntos de condiciones:

- (i) Ecuación de Euler y
- (ii) Condición de transversalidad.

Se verifica un “si y sólo si”:

si $x^*(t)$, $t = 0 \dots \infty$, verifica (i) y (ii), entonces $x^*(t)$ es solución del problema (suficientes) y

sólo si $x^*(t)$ verifica (i) y (ii) puede ser una solución del problema (necesarias).

(i) Ecuación de Euler

Consideremos la versión recursiva del problema:

$$V(x(t)) = \max_{x(t+1) \in G(x(t))} \{U(x(t), x(t+1)) + \beta V(x(t+1))\}$$

Se puede demostrar que $V(\cdot)$ es estrictamente cóncavo y diferenciable. Entonces, en el óptimo deberá cumplirse la *ecuación de Euler*:

$$U_2(x(t), x^*(t+1)) + \beta V'(x^*(t+1)) = 0$$

donde: U_i es la derivada respecto al argumento $i = 1$ o 2 .

Interpretación: en el sendero óptimo, si aumento $x(t+1)$ un infinitésimo, el cambio en la utilidad de hoy debe ser compensado exactamente por el cambio en la utilidad futura.

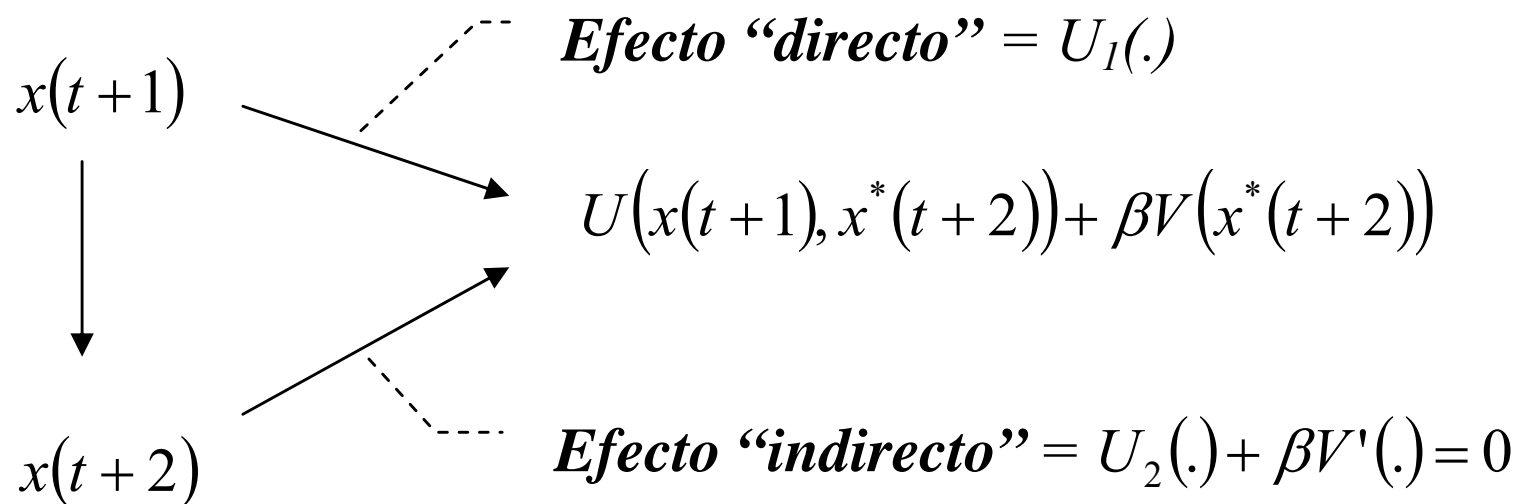
No conocemos todavía la forma de $V(\cdot)$, pero sabemos que:

$$V(x(t+1)) = U(x(t+1), x^*(t+2)) + \beta V(x^*(t+2))$$

Derivando respecto a $x(t+1)$ y usando el teorema de la envolvente tenemos:

$$V'(x(t+1)) = U_1(x(t+1), x^*(t+2))$$

Teorema de la envolvente aplicado a este caso:



Podemos entonces reescribir la ecuación de Euler como:

$$U_2(x(t), x^*(t+1)) + \beta U_1(x^*(t+1), x^*(t+2)) = 0$$

y usando la función de política:

$$U_2(x(t), \pi(x(t))) + \beta U_1(\pi(x(t)), \pi(\pi(x(t)))) = 0$$

Esta formulación muestra que en realidad estamos ante una **ecuación funcional**: la incógnita no es una variable, sino una función $\pi(x)$.

(ii) Condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t U_1(x^*(t), x^*(t+1)) x^*(t) = 0$$