

Índice de diapositivas en Tr2009\_7\_Ramsey\_discreto.doc

8	El modelo de Ramsey en tiempo discreto.....	2
8.1	Crecimiento óptimo en tiempo discreto .....	2
8.1.1	Un ejemplo simple .....	2
8.1.2	Crecimiento óptimo en tiempo discreto, el caso general .....	7
8.2	Crecimiento en el equilibrio competitivo en tiempo discreto .....	11
8.2.3	Las familias .....	11
8.2.4	Las empresas y la producción .....	20
8.2.5	El equilibrio general competitivo .....	22

# 8 El modelo de Ramsey en tiempo discreto

## *8.1 Crecimiento óptimo en tiempo discreto*

### **8.1.1 Un ejemplo simple**

(Ejemplo 6.4 en Acemoglu 2009)

Suponemos (i) utilidad logarítmica, (ii) función de producción Cobb-Douglas, (iii) tasa de depreciación = 1, (iv) la población no crece ( $n=0$ ).

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c(t)$$

$$\text{sujeto a: } k(t+1) = k(t)^\alpha - c(t)$$

$$k(0) > 0, k(t) \geq 0, c(t) \geq 0$$

La versión recursiva de este problema está dada por la siguiente ecuación de Bellman:

$$V(k(t)) = \max_{k(t+1)} \left\{ \log(k(t)^\alpha - k(t+1)) + \beta V(k(t+1)) \right\}$$

$$\text{sujeto a: } k(t+1) \in [0, k(t)^\alpha]$$

Notar que la función  $U(x(t), x(t+1))$  de la ecuación de Bellman del problema (estacionario) general es en este caso:

$$U(x(t), x(t+1)) = \log(k(t)^\alpha - k(t+1))$$

Entonces, la condición de Euler:

$$U_2(x(t), x^*(t+1)) + \beta U_1(x^*(t+1), x^*(t+2)) = 0$$

es en este caso particular:

$$\frac{-1}{k(t)^\alpha - k(t+1)} + \beta \frac{\alpha k(t+1)^{\alpha-1}}{k(t+1)^\alpha - k(t+2)} = 0$$

Lo escribimos en términos de la función de política:

$$\frac{-1}{k(t)^\alpha - \pi(k(t))} + \beta \frac{\alpha \pi(k(t))^{\alpha-1}}{\pi(k(t))^\alpha - \pi(\pi(k(t)))} = 0$$

¿Cómo resolver la ecuación funcional? Conjeturar una solución y luego verificar. En este caso, se sugiere:

$$\pi(k(t)) = ak(t)^\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(t)^\alpha - ak(t)^\alpha} &= \beta \frac{\alpha a^{\alpha-1} (k(t))^{\alpha(\alpha-1)}}{a^\alpha (k(t))^{\alpha^2} - a^{1+\alpha} (k(t))^{\alpha^2}} \\ &= \left( \frac{\beta}{a} \right) \left( \frac{\alpha}{(k(t))^\alpha - a(k(t))^\alpha} \right) = \frac{\alpha\beta}{a(1-a)k(t)^\alpha} \end{aligned}$$

Entonces, si  $a = \beta\alpha$ , la conjetura propuesta verifica la ecuación de Euler.

La ecuación de movimiento del capital es entonces:

$$k(t+1) = \pi(k(t)) = \alpha\beta k(t)^\alpha$$

El capital converge a un estado estacionario definido como:

$$k^{SS} = (\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)}$$

La condición de transversalidad en el problema (estacionario) general era:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t U_1(x^*(t), x^*(t+1)) x^*(t) = 0$$

En este ejemplo particular esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{\partial \log(k(t)^\alpha - k(t+1))}{\partial k(t)} k(t) = 0$$

Esta condición se verifica ya que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1}}{(k(t)^\alpha - k(t+1))} k(t) =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1}}{(k(t)^\alpha - \alpha\beta k(t)^\alpha)} k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{\alpha}{(1 - \alpha\beta)} = 0$$

## 8.1.2 Crecimiento óptimo en tiempo discreto, el caso general

$$\text{Max}_{\{k(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

$$\text{sujeto a: } k(t+1) = f(k(t)) + (1 - \delta)k(t) - c(t)$$

$$k(t) \geq 0 ; k(0) > 0$$

Supuestos:

1)  $F(K, L)$  es creciente, cóncava y hay rendimientos constantes a escala, siendo  $f(k) = F(K, L)/L$ ,  $k = K/L$

2) Se cumplen las condiciones de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, L) = \infty ; \lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, L) = 0$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} F_L(K, L) = \infty ; \lim_{L \rightarrow \infty} F_L(K, L) = 0$$

$$F(0, L) = 0$$

3) La función de utilidad es diferenciable y estrictamente cóncava.

4) Población no crece ( $n=0$ )

Escribimos el problema de crecimiento óptimo como un problema de programación dinámica:

$$V(k(t)) = \max_{s \in G(k(t))} \{u(f(k(t)) + (1 - \delta)k(t) - k(t + 1)) + \beta V(k(t + 1))\}$$

La ecuación de Euler es:

$$u'(c(t)) = \beta V'(k(t + 1)) = \beta [f'(k(t + 1)) + (1 - \delta)] u'(c(t + 1))$$

Reordenando términos:

$$TMS = \frac{u'(c(t))}{\beta u'(c(t + 1))} = f'(k(t + 1)) + (1 - \delta) = TMT$$

En el óptimo, la relación de utilidades marginales de consumo de hoy y de mañana debe igualar a la tasa a la cual es posible transformar bienes de hoy en bienes de mañana.

La condición de transversalidad es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t U_1(x^*(t), x^*(t+1)) x^*(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t [f'(k(t)) + (1 - \delta)] u'(c(t)) k(t) = 0$$

La ecuación de Euler implica que en el estado estacionario:

$$\beta [f'(k^{SS}) + (1 - \delta)] = 1$$

Es decir que el capital per capita del estado estacionario solo depende del factor de descuento, la tecnología y la tasa de depreciación del capital.

Siendo  $f(k)$  cóncava,  $k^{SS}$  es única. Es inmediato que la condición de transversalidad se verifica en el estado estacionario. Se demuestra que el sistema converge en forma monótona hacia  $(k^{SS}, c^{SS})$ .

## ***8.2 Crecimiento en el equilibrio competitivo en tiempo discreto***

Mostraremos que el equilibrio competitivo coincide con la solución del problema de crecimiento óptimo.

### **8.2.1 Las familias**

Economía integrada por gran número de familias idénticas (“representativas”). La población no crece. Las familias resuelven:

$$\text{Max } \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$$

$$\text{sujeto } a: \quad a(t+1) = (1+r(t))a(t) - c(t) + w(t)$$
$$a(0) \text{ dado}$$

donde:  $a(t)$  son los activos que tiene la familia;  $r(t)$  es la tasa de retorno de esos activos y  $w(t)$  es el ingreso laboral.

La restricción presupuestal de flujo no es suficiente: las familias podrían endeudarse indefinidamente y no estarían entonces restringidas en su consumo. Derivamos una condición “final” que impone un límite al consumo y establece equivalencia entre la versión secuencial y la recursiva:

$$a(1) = (1+r(0))a(0) - c(0) + w(0)$$

En el período siguiente:

$$a(2) = (1 + r(1))a(1) - c(1) + w(1)$$

$$\rightarrow a(1) = \frac{a(2) + c(1) - w(1)}{(1 + r(1))}$$

Sustituyo en la restricción del primer período:

$$\frac{a(2) + c(1) - w(1)}{(1 + r(1))} = (1 + r(0))a(0) - c(0) + w(0)$$

Reordeno términos:

$$c(0) + \frac{c(1)}{(1 + r(1))} = (1 + r(0))a(0) + w(0) + \frac{w(1)}{(1 + r(1))} - \frac{a(2)}{(1 + r(1))}$$

$$\frac{c(0)}{(1+r(0))} + \frac{c(1)}{(1+r(0))(1+r(1))} = a(0) + \frac{w(0)}{(1+r(0))}$$

$$+ \frac{w(1)}{(1+r(0))(1+r(1))} - \frac{a(2)}{(1+r(0))(1+r(1))}$$

Repitiendo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c(t)}{\prod_{s=0}^t (1+r(s))} = a(0) + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w(t)}{\prod_{s=0}^t (1+r(s))}$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{\prod_{s=0}^{t-1} (1+r(s))}$$

Si imponemos la condición de que “*no hay juego de Ponzi*”:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{\prod_{s=0}^{t-1} (1+r(s))} \geq 0$$

Tenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c(t)}{\prod_{s=0}^t (1+r(s))} \leq a(0) + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w(t)}{\prod_{s=0}^t (1+r(s))}$$

Es decir que la suma descontada del consumo es menor o igual a los activos iniciales más la suma descontada de ingresos laborales.

Necesitamos entonces la restricción de que no hay juego de Ponzi para que la restricción presupuestal de flujo imponga efectivamente una restricción al consumo y sea equivalente a una restricción presupuestal a lo largo de la vida o intertemporal.

Caracterizamos la regla de consumo y ahorro óptima de las familias:

Ecuación de Bellman:

$$V(a(t)) = \max \{u((1 + r(t))a(t) + w(t) - a(t + 1)) + \beta V(a(t + 1))\}$$

Analizamos las condiciones necesarias y suficientes para un óptimo: (i) Euler y (ii) Transversalidad.

(i) La ecuación de Euler es:

$$u'(c(t)) = \beta(1 + r(t + 1))u'(c(t + 1))$$

Notar: la tasa marginal de transformación para la familia es simplemente 1 más la tasa de interés.

La regla de consumo entonces es:

$$c(t+1) > c(t) \text{ si } 1 < \beta(1+r(t+1))$$

$$c(t+1) = c(t) \text{ si } 1 = \beta(1+r(t+1))$$

$$c(t+1) < c(t) \text{ si } 1 > \beta(1+r(t+1))$$

Es decir que la pendiente del consumo es independiente de la riqueza inicial y del sendero de ingresos laborales.

(ii) La condición de transversalidad

En el óptimo, debe verificarse que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t U_1(x^*(t), x^*(t+1)) x^*(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'(c(t)^*) (1+r(t)) a^*(t) = 0$$

De la condición de Euler:

$$u'(c(t))(1+r(t)) = \frac{u'(c(t-1))}{\beta}$$

Debería entonces cumplirse que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-1} u'(c(t-1)) a^*(t) = 0$$

Sigo sustituyendo hacia atrás:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-2} \frac{u'(c(t-2))}{1+r(t-1)} a^*(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-3} \frac{u'(c(t-3))}{(1+r(t-1))(1+r(t-2))} a^*(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u'(c(0))}{\prod_{s=0}^{t-1} (1+r(s))} a^*(t) = 0$$

Como la utilidad marginal del consumo inicial es una constante positiva, la ecuación anterior implica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^*(t)}{\prod_{s=0}^{t-1} (1+r(s))} = 0$$

Y esta es la condición de que no hay juego de Ponzi en una “forma fuerte”, es decir imponiendo igualdad en lugar de mayor o igual.

Interpretación: no puede ser óptimo que los activos “finales” sean estrictamente positivos. La restricción presupuestal intertemporal impone sólo un máximo a la suma descontada

del consumo, se puede consumir menos, pero no es óptimo hacerlo.

## 8.2.2 Las empresas y la producción

Empresas competitivas con rendimientos constantes a escala:  
beneficios nulos →

Factores son remunerados según su productividad marginal:

$$r(t) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} - \delta$$

En la forma intensiva:

$$f(k(t)) = F(K, L)/L$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = Lf'(k) \frac{\partial k}{\partial K} = f'(k)$$

En cuanto al trabajo:

$$W(t) = \partial F(K, L) / \partial L = \partial F(K, L) / \partial L$$

En la forma intensiva:

$$F(K, L) = Lf(k(t))$$

La derivada respecto a L resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} &= f(k(t)) + Lf'(k(t))\left(-\frac{K(t)}{L^2}\right) \\ &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t))\end{aligned}$$

Finalmente:  $W(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$

### 8.2.3 El equilibrio general competitivo

Se caracteriza por:

- (i) Familias optimizan
- (ii) Empresas optimizan
- (iii) Ahorro = Inversión

Optimización de familias y empresas implica:

$$\begin{aligned}
u'(c(t)) &= \beta(1 + r(t + 1))u'(c(t + 1)) \\
&= \beta(1 + f'(k(t + 1)) - \delta)u'(c(t + 1))
\end{aligned}$$

Esta es la misma condición de Euler que obtuvimos al resolver el problema de crecimiento óptimo.

A su vez, la condición de transversalidad de las familias es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'(c(t)^*) (1 + r(t)) a^*(t) = 0$$

y en el equilibrio se cumple que:

$$(i) \quad a(t) = k(t)$$

$$(ii) \quad r(t) = f'(k(t)) - \delta$$

Entonces obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'(c(t)^*) (f'(k(t)) + 1 - \delta) k^*(t) = 0$$

que es la condición de transversalidad del problema de crecimiento óptimo.

**Conclusión:** la economía competitiva genera el sendero de capital y consumo que produce el crecimiento socialmente óptimo.