Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República, Uruguay
Maestría en Economía Internacional 2009. Macroeconomía. Alvaro Forteza

Índice de diapositivas en Tr2009_8_Optim_incert.doc

9 Optimización dinámica bajo incertidumbre

9.1 Un ejemplo de maximización de la utilidad en condiciones de incertidumbre

9.1.1 Dos estados de la naturaleza

El “ambiente”:

- Dos períodos
- Trabajo (exógeno) en el primer período, con ingreso W

- Dos "estados de la naturaleza": tasa de interés baja $(\underline{r})$ o alta $(\bar{r})$ con probabilidades P y 1-P

Conjunto de posibilidades de consumo:

Si tasa de interés es baja: $c_1 + \underline{c_2}/(1+\underline{r}) = W$

Si tasa de interés es alta: $c_1 + \overline{c_2}/(1+\bar{r}) = W$

Preferencias representadas por utilidad esperada:

$$U = u(c_1) + \beta E[u(c_2)] = u(c_1) + \beta[Pu(\underline{c_2}) + (1-P)u(\overline{c_2})]$$

La decisión de la familia:

Elegir $c_1, \underline{c_2}$ y $\overline{c_2}$, dentro del conjunto de posibilidades de consumo, de tal manera de maximizar la utilidad esperada.

Formalmente:

$$\underset{c_1, \underline{c_2}, \overline{c}_2}{Maximizar} \qquad u(c_1) + \beta\left[Pu\left(\underline{c_2}\right) + (1-P)u\left(\overline{c_2}\right)\right]$$

$$sujeto\ \ a: \qquad c_1 + \underline{c_2}/\left(1+\underline{r}\right) = W$$

$$c_1 + \overline{c_2}/\left(1+\overline{r}\right) = W$$

El lagrangeano es:

$$L = u(c_1) + \beta\left[Pu\left(\underline{c_2}\right) + (1-P)u\left(\overline{c_2}\right)\right]$$

$$+\underline{\lambda}\left(W - c_1 - \frac{\underline{c_2}}{1+\underline{r}}\right) + \overline{\lambda}\left(W - c_1 - \frac{\overline{c_2}}{1+\overline{r}}\right)$$

Condiciones de primer orden:

$$\partial L / \partial c_1 = u'(c_1) - \underline{\lambda} - \overline{\lambda} = 0$$

$$\partial L / \partial \underline{c_2} = \beta P u'(\underline{c_2}) - \underline{\lambda} / (1 + \underline{r}) = 0$$

$$\partial L / \partial \overline{c_2} = \beta (1 - P) u'(\overline{c_2}) - \overline{\lambda} / (1 + \overline{r}) = 0$$

$$\partial L / \partial \underline{\lambda} = W - c_1 - \underline{c_2} / (1 + \underline{r}) = 0$$

$$\partial L / \partial \overline{\lambda} = W - c_1 - \overline{c_2} / (1 + \overline{r}) = 0$$

Combinando las tres primeras condiciones obtenemos una **ecuación de Euler**:

$$u'(c_1) = \underline{\lambda} + \overline{\lambda} = \beta\left[P u'\left(\underline{c_2}\right)\left(1+\underline{r}\right) + \left(1-P\right) u'\left(\overline{c_2}\right)\left(1+\overline{r}\right)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$u'(c_1) = \beta\, E\left[u'(c_2)(1+r)\right]$$

Observación:

El consumo óptimo para el primer período depende del consumo del segundo período y de la tasa de interés, ambas variables aleatorias desde la perspectiva del primer período.

La riqueza como seguro o protección contra el riesgo:

No sólo los valores esperados del consumo del segundo período y de la tasa de interés importan, también interesa su variación conjunta:

$$u'(c_1) = \beta\, E[u'(c_2)(1+r)] = \beta\{E[u'(c_2)]E[(1+r)] + Cov[u'(c_2), 1+r]\}$$

El individuo estará más dispuesto a sacrificar consumo presente (elegir c_1 “bajo”), si la tasa de interés está positivamente correlacionada con la utilidad marginal del consumo del segundo período. Es decir, estará más dispuesto a ahorrar en el primer período si la riqueza ahorrada tiene un retorno mayor en las “malas” coyunturas, que es cuando un mayor retorno se valora más. Las “malas” coyunturas son aquellas en que se consume menos y, por lo tanto, la utilidad marginal del consumo es mayor (se valora más una unidad adicional de consumo). En conclusión, se ahorra más si la riqueza sirve como seguro.

9.1.2 Un continuo de estados de la naturaleza

La tasa de interés es incierta y continua.

Hay una función de densidad $f(r)$.

El individuo debe elegir el consumo del segundo período en cada estado de la naturaleza, es decir para cada valor de r: $c_2(r)$.

La restricción presupuestal debe cumplirse en todos y cada uno de los estados de la naturaleza, por lo cual hay un continuo de restricciones y el multiplicador de Lagrange es una función de r: $\lambda(r)$

El lagrangeano es:

$$L = u(c_1) + \beta \int_{-\infty}^{\infty} u(c_2(r)) f(r) dr + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(r) \left(w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} \right) dr$$

O lo que es lo mismo:

$$L = u(c_1) + \beta E[u(c_2(r))] + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(r) \left(w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} \right) dr$$

Notar:

a) No es el valor esperado de la restricción presupuestal lo que aparece en el Lagrangeano. No alcanza con satisfacer la restricción presupuestal “en promedio”, debe satisfacerse en todos los períodos.

b) Sin embargo, en un óptimo la restricción vale como igualdad y entonces:

$$0 = w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} = \left(w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} \right) f(r) \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} L \qquad &= u(c_1) + \beta E[u(c_2(r))] + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(r) \left(w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} \right) f(r) dr \\ &= u(c_1) + \beta E[u(c_2(r))] + E\left[\lambda(r) \left(w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} \right) \right] \end{aligned}$$

Se puede mostrar que con cualquiera de estas versiones del Lagrangeano se obtienen las mismas condiciones de primer orden. Partamos de la siguiente versión:

$$L = u(c_1) + \beta \int_{-\infty}^{\infty} u(c_2(r)) f(r) dr + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(r) \left(w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right) dr$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = u'(c_1) - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(r) dr = 0$$

(1)

$$\frac{\partial L}{\partial c_2(r)} = \beta u'(c_2(r)) f(r) - \frac{\lambda(r)}{1+r} = 0 \qquad \forall r$$

(2)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda(r)} = w - c_1 - \frac{c_2(r)}{1+r} = 0 \qquad \forall r$$

(3)

de (2): $\lambda(r) = \beta u'(c_2(r))(1+r) f(r) \qquad \forall r$

Usando este resultado en (1):

$$u'(c_1) - \int_{-\infty}^{\infty} \beta u'(c_2(r))(1+r) f(r) dr = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$u'(c_1) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} u'(c_2(r))(1+r) f(r) dr = \beta E[u'(c_2(r))(1+r)]$$

Es decir que encontramos una condición de Euler análoga a la que obtuvimos en el caso de dos estados de la naturaleza.

9.2 Programación dinámica estocástica

9.2.1 Presentación del problema y algunos ejemplos

Shocks estocásticos: $z(t) \in Z \equiv \{z_1, ..., z_N\}; \;\; z_1 < z_2 < ... < z_N$

Supuestos sobre el shock:
(i) Toma un número finito (o por lo menos numerable) de valores y se comporta como una cadena de Markov; **o**
(ii) Toma valores en un continuo (o en mezcla de continuo y discreto) y se comporta como un proceso general de Markov.

Desarrollamos el detalle bajo el supuesto (i) más simple y luego vemos la extensión al caso (ii).

Cadena de Markov:

$$\Pr\left[z(t)=z_j \middle| z(0),\ldots,z(t-1)\right] \equiv \Pr\left[z(t)=z_j \middle| z(t-1)\right]$$

¿Por qué elegir esta representación? Permite manejar en forma simple procesos de shocks autocorrelacionados.

Si hubiera N ***estados de la naturaleza*** (valores posibles del shock):

$$\Pr\left[z(t)=z_j \middle| z(t-1)=z_{j'}\right] \equiv q_{jj'} \quad ; \quad \sum_{j=1}^{N} q_{jj'} = 1$$

$q_{jj'}$ = probabilidad de transición

La utilidad instantánea en t es: $U\left(x(t), x(t+1), z(t)\right)$

(Simplificamos considerando un problema estacionario)

El conjunto de valores posibles de la variable de control depende del shock:

$$x(t+1) \in G(x(t), z(t))$$

La utilidad en cada período depende del shock:

$$U(x(t), x(t+1), z(t))$$

Ejemplo (16.1 en Acemoglu 2009). **Crecimiento óptimo con shocks de productividad**

Supongamos que el producto per capita está dado por:

$$y(t) = f(k(t), z(t))$$

donde hay shocks de la productividad total de los factores.

La restricción de recursos es:

$$k(t+1) = f\left(k(t), z(t)\right) + (1-\delta)k(t) - c(t)$$

El consumo en t depende de la realización de los shocks hasta t:

$$c(t) = \tilde{c}\left[z^t\right];\ donde: z^t = \left(z(1), \ldots, z(t)\right)$$

y el capital en t+1 también depende de la realización de los shocks hasta t:

$$k(t+1) = f\left(k(t), z(t)\right) + (1-\delta)k(t) - \tilde{c}\left[z^t\right] \equiv \tilde{k}\left[z^t\right]$$

y por lo tanto:

$$\tilde{k}\left[z^t\right] = f\left(\tilde{k}\left[z^{t-1}\right], z(t)\right) + (1-\delta)\tilde{k}\left[z^{t-1}\right] - \tilde{c}\left[z^t\right]; \;\; \forall\, z^{t-1} \in \mathrm{Z}^{t-1}$$

Como el consumo depende del shock, usamos una función de utilidad ***esperada***: $\mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t))$

donde E_0 es el valor esperado condicional a la información disponible en t=0.

El problema de crecimiento óptimo con incertidumbre consiste entonces en encontrar las funciones de política $\tilde{c}\left[z^t\right], \tilde{k}\left[z^t\right]$ que resuelven:

$$\max_{\left\{\tilde{c}\left[z^t\right],\tilde{k}\left[z^t\right]\right\}_{t=0}^{\infty}} \quad \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(\tilde{c}\left[z^t\right]\right)$$

$$
\begin{aligned}
sa: \quad & \tilde{k}\left[z^t\right] = f\left(\tilde{k}\left[z^{t-1}\right], z(t)\right) + (1-\delta)\tilde{k}\left[z^{t-1}\right] - \tilde{c}\left[z^t\right] \\
& \tilde{k}\left[z^t\right] \geq 0 \ \ ; \ \forall \ z^t \in Z^t \ \ ; \ t = 0,1,\ldots \\
& \tilde{c}\left[z^t\right] \geq 0 \ \ ; \ \forall \ z^t \in Z^t \ \ ; \ t = 0,1,\ldots \\
& k(0) = \tilde{k}\left[z^{-1}\right] \ dado \\
& z(0) \ dado
\end{aligned}
$$

Versión recursiva del ejemplo de crecimiento óptimo con incertidumbre:

Notar primero que, por ser el proceso una cadena de Markov, cabe esperar que el stock de capital óptimo para t+1 sólo dependa del capital en t y de la realización del shock en t:

$$k(t+1)=\pi(k(t),z(t))$$

Del mismo modo, la forma recursiva del problema tendrá la siguiente forma:

$$V(k,z)=\sup_{y\in[0,f(k,z)+(1-\delta)k]}\left\{u(f(k,z)+(1-\delta)k-y)+\beta \mathrm{E}[V(y,z')|z]\right\}$$

donde:

k = capital del período actual
y = capital del período siguiente
z = realización del shock en el período actual
z'= valores posibles del shock en el período siguiente

Notar que la esperanza aquí es sobre los valores de *z'*, condicional a que se conoce el valor *z*. En el problema secuencial, la esperanza es sobre todos los valores futuros de *z*, dada la información disponible en *t=0*.

9.2.2 Las versiones secuencial y recursiva "generales"

Como en el caso determinístico, caracterizamos los siguientes dos problemas.

Problema secuencial (Acemoglu 2009, Problema 16.1):

$$V^*(x(0), z(0)) = \sup_{\{\tilde{x}[z^t]\}_{t=0}^{\infty}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(\tilde{x}[z^{t-1}], \tilde{x}[z^t], z(t)\right)$$

$$sa: \quad \tilde{x}[z^t] \in G\left(\tilde{x}[z^{t-1}], z(t)\right) \quad \forall t \geq 0$$

$$\tilde{x}[z^{-1}] = x(0) \; dado$$

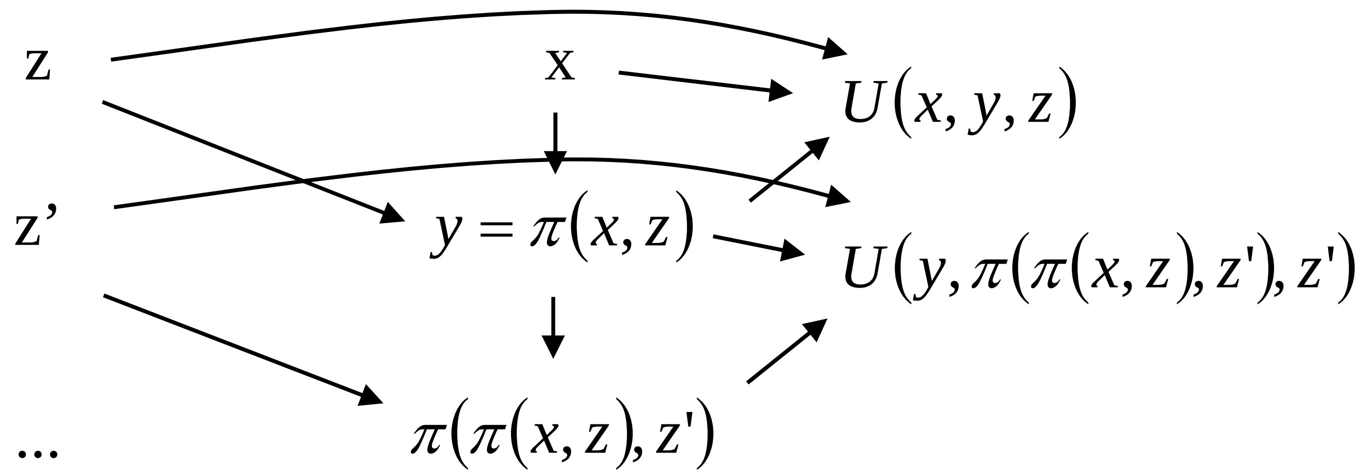
Problema recursivo (Acemoglu 2009, Problema 16.2):

$$V(x,z) = \sup_{y \in G(x,z)} \left\{ U(x,y,z) + \beta \mathrm{E}\left[V(y,z') \middle| z \right] \right\} \; ; \quad \forall x \in X\,,\ z \in Z$$

donde:

$$\mathrm{E}\left[V(y,z') \middle| z \right] = \sum_{j=1}^{N} \Pr\left[z' = z_j \middle| z \right] V(y,z')$$

Shock Estado Utilidad por período



Acemoglu (2009) presenta en detalle las condiciones bajo las cuales ambos problemas tienen solución y las soluciones coinciden y demuestra los teoremas correspondientes. Nosotros nos limitaremos a presentar las condiciones necesarias y suficientes que permiten caracterizar la solución.

Condiciones de Euler y de transversalidad estocásticas

Partimos del problema recursivo:

$$V(x,z) = \sup_{y \in G(x,z)} \left\{ U(x,y,z) + \beta \mathrm{E}\left[V(y,z') \middle| z \right] \right\}; \quad \forall x \in X,\ z \in Z$$

Se puede demostrar que V(.) es estrictamente cóncavo y diferenciable. Entonces, en el óptimo deberá cumplirse la *ecuación de Euler*:

$$U_2\left(x, y^*, z\right) + \beta \mathrm{E}\left[V_1\left(y^*, z'\right) \middle| z\right] = 0$$

Aplicando el teorema de la envolvente:

$$V_1(x, z) = U_1\left(x, y^*, z\right)$$

Tenemos que aplicar esta última expresión un período hacia adelante. Resulta entonces más claro usar la siguiente notación: $y^* = \pi(x, z)$

$$V_1(x, z) = U_1\left(x, \pi(x, z), z\right)$$

En el siguiente período tenemos:

$$V_1\left(y^*, z'\right) = U_1\left(y^*, \pi\left(y^*, z'\right), z'\right)$$

Sustituyendo $y^* = \pi(x, z)$ obtenemos:

$$V_1\left(y^*, z'\right) = U_1\left(\pi(x, z), \pi(\pi(x, z), z'), z'\right)$$

Por lo tanto la ecuación de Euler queda:

$$U_2\left(x, \pi(x, z), z\right) + \beta \mathrm{E}\left[U_1\left(\pi(x, z), \pi(\pi(x, z), z'), z'\right) \middle| z\right] = 0$$

Que también puede escribirse como:

$$U_2\left(\tilde{x}^*\left(z^{t-1}\right), \tilde{x}^*\left(z^t\right), z(t)\right) + \beta \mathrm{E}\left[U_1\left(\tilde{x}^*\left(z^t\right), \tilde{x}^*\left(z^{t+1}\right), z(t+1)\right) \middle| z(t)\right] = 0$$

Condición de transversalidad: el valor esperado del retorno marginal descontado de la variable de estado multiplicado por la variable de estado debe tender a cero a medida que el horizonte tiende a infinito.

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mathrm{E}\left[U_1\left(\tilde{x}^*\left[z^{t-1} \right], \tilde{x}^*\left[z^t \right], z(t) \right) . \tilde{x}^*\left[z^{t-1} \right] \| z(0) \right] = 0$$

9.2.3 Aplicación: La hipótesis del ingreso permanente

Mantenemos el supuesto de que la población no crece.
La familia resuelve lo siguiente:

$$\underset{\{c(t),a(t)\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \quad \mathrm{E}_0 \beta^t u(c(t))$$

$$sa: \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} c(t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} w(t) + a(0)$$

El operador esperanza aparece porque suponemos que el salario es aleatorio. Concretamente, suponemos que:

(i) $w \in \{w_1, ..., w_N\}$; $w_1 < ... < w_N$

(ii) distribución de *w* independiente a lo largo del tiempo con: $\Pr\lfloor w(t) = w_j \rfloor = q_j$

Suponemos en este ejemplo que la tasa de interés es constante.

Notar: la restricción presupuestal debe cumplirse en todos los senderos posibles ==> ***restricción de crédito endógena***.

Si hubiera un estado con salario cero, la familia no podría endeudarse y a la vez respetar la restricción presupuestal intertemporal, porque existe una probabilidad no nula de que la familia tenga ingresos cero de aquí en más.

En general, los activos en t deberán respetar:

$$a(t) \geq -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} w_1 \equiv -b_1$$

Reformulamos el problema en forma recursiva:

$$a' = (1+r)a + w - c$$

La función de valor es:

$$V(a,w) = \max_{a' \in [-b_1, (1+r)a+w]} \{u((1+r)a + w - a') + \beta E[V(a', w')]\}$$

Notar: usamos el supuesto de que *w* se distribuye independiente a lo largo del tiempo.

La ecuación de Euler es:

$$u'(c(t)) = \beta(1+r)\mathrm{E}_t u'(c(t+1))$$

Si, en particular, la utilidad fuera cuadrática y $\beta(1+r)=1$, la condición de Euler implicaría la siguiente regla de consumo:

$$c(t) = \mathrm{E}_t\left(c(t+1)\right)$$

Según esta regla, el ingreso no determina el crecimiento del consumo, sólo determina su nivel.