Programa: Maestría en Economía Internacional
Edición: 2009-2010
Curso: Política Macroeconómica
Docente: Alvaro Forteza

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

Primer Juego de Ejercicios

1. (1 punto) Suponga que tres votantes (A, B y C) eligen una de tres políticas posibles (1, 2 y 3) en base a la regla pura de la mayoría. El orden de preferencias es: $A: 1 \succ 2 \succ 3;\ B: 1 \succ 2 \succ 3; C: 2 \succ 1 \succ 3$. ¿Existe una política ganadora de Condorcet? Fundamente su respuesta.

2. (1 punto) Muestre que la siguiente función de preferencias de política satisface la propiedad de un solo cruce: $W^i(g) = (y-g)\frac{y^i}{y} + H(g)$. En esta expresión, *y* es el ingreso medio, y^i es el ingreso del individuo *i*, *g* es el gasto público per cápita y *H(g)* es una función creciente y cóncava.

3. (2 puntos) Todos los individuos de un país tienen un mismo ingreso (y). El gobierno cobra una tasa de impuestos al ingreso (τ) y provee dos bienes públicos (g_1 y g_2 per cápita). Los individuos también consumen un bien privado "*c*". La población es heterogénea en términos de sus preferencias por los bienes públicos. La utilidad del individuo i es: $u^i = Ln(c) + \alpha^i Ln(g_1) + (1-\alpha^i)Ln(g_2)$.

   3.1. ¿Satisfacen estas preferencias la condición de preferencias intermedias?

   3.2. Determine el par (g_1,g_2) preferido por el votante i, si $\alpha^i = 1$.

4. (5 puntos) Un país está compuesto por dos grupos de ciudadanos. El grupo 1 tiene 1 millón de votantes y el grupo 2 tiene 2 millones de votantes. Hay un gobierno que puede hacer transferencias de un grupo a otro. Sea t_1 la transferencia que *recibe* cada miembro del grupo 1 y t_2 la transferencia que *recibe* cada miembro del grupo 2 (valores negativos de t_1 o de t_2 representan entonces transferencias *desde* los individuos de los grupos 1 y 2, respectivamente). Todos los individuos tienen el mismo ingreso de 10 unidades antes de las transferencias y, por lo tanto, el ingreso después de transferencias es $(10+t_1)$ para los miembros del grupo 1 y $(10+t_2)$ para los miembros del grupo 2. Las preferencias de los individuos por el ingreso disponible se pueden representar por una función de utilidad continua, creciente y cóncava: $u(10+t_i)$, $u'>0$, $u''<0$, $i=1,2$. La restricción presupuestal del gobierno resulta: $t_1 + 2t_2 = 0$. El gobierno no puede extraer de un individuo más que los ingresos que el individuo tiene antes de las transferencias, es decir que se debe verificar que: $t_1 \geq -10$ y $t_2 \geq -10$.

   4.1. Determine la política preferida por los ciudadanos de cada grupo.

   4.2. ¿Se satisface la condición de que las preferencias de políticas tienen "un solo pico"?

Suponga que dos candidatos compiten por las preferencias del electorado ofreciendo transferencias. Su único objetivo es ganar las elecciones. Tienen capacidad de comprometer sus políticas durante la campaña electoral. El candidato A presenta una plataforma electoral $\left(t_1^A, t_2^A\right)$ y el candidato B presenta una plataforma $\left(t_1^B, t_2^B\right)$.

4.3. Determine las plataformas de ambos candidatos en el equilibrio político.

Suponga ahora que los individuos tienen ciertas preferencias partidarias. El índice de utilidad σ representa la preferencia partidaria neta por el candidato B. Teniendo en cuenta las preferencias de políticas y las preferencias partidarias, un votante con preferencia partidaria σ vota por el candidato A si: $u\left(10+t_i^A\right) > u\left(10+t_i^B\right)+\sigma$. Los ciudadanos tienen preferencias partidarias heterogéneas, distribuidas uniformemente en la población con media cero y densidad Σ (la misma en ambos grupos). Los candidatos no conocen la preferencias partidarias individuales cuando eligen su plataforma electoral, pero conocen la distribución de esas preferencias.

4.4. Muestre que el número de votos que obtiene el candidato A (en millones) está dado por la siguiente expresión:

$$V^A = \frac{3}{2} + \left[u\left(10+t_1^A\right) - u\left(10+t_1^B\right) + 2u\left(10+t_2^A\right) - 2u\left(10+t_2^B\right)\right]\Sigma .$$

4.5. Determine las plataformas de ambos candidatos en el equilibrio político, suponiendo que su objetivo es maximizar el número de votos.

5. (1 punto) Considere un modelo de elecciones con lobbies ofreciendo contribuciones para el financiamiento de las campañas electorales. Los candidatos comprometen el gasto público (g) durante la campaña. El financiamiento del gasto público se hace con un impuesto proporcional al ingreso, con lo cual la política fiscal resulta redistributiva. El modelo es el mismo que presentan Persson y Tabellini (2000, sección 3.5) y es el presentado en clase (sección 2.4), salvo que la función de objetivos del lobby J recoge el supuesto de que el costo de la contribución para el lobista es tanto mayor cuanto menor es su ingreso:

$$P_A W^J\left(g_A\right) + \left(1-P_A\right) W^J\left(g_B\right) - \tfrac{1}{2}\left[\left(C_A^J / y^J\right)^2 + \left(C_B^J / y^J\right)^2\right]$$

Hay tres grupos (pobres, clase media y ricos) igualmente numerosos (α^J=1/3, para todo J). Suponiendo que todos los grupos están organizados para hacer contribuciones (O^J=1, para todo J), diga si la acción de los lobbies desplaza el equilibrio político hacia más o menos gobierno. Fundamente su respuesta.

Programa: Maestría en Economía Internacional
Edición: 2009-2010
Curso: Política Macroeconómica
Docente: Alvaro Forteza

Pauta de respuesta

1. Sí, la política 1 es ganadora de Condorcet. En una primera ronda, enfrentamos 1 a 2 y vence 1 por ser preferida por A y por B. Luego enfrentamos a la ganadora de la primera ronda, es decir a 1, y a 3. Nuevamente 1 vence a 3.

2. La propiedad de un solo cruce se cumple si se verifica la siguiente condición (y su simétrico que no incluyo): si *a* prefiere g' a g", siendo g'>g", entonces todos los "más pobres" que *a* (los *b* tales que $y^b<y^a$) prefieren también g' frente a g". Lo que se pide entonces es demostrar que esta condición (y su simétrica) se verifica en este caso particular. Dada la forma de la función de preferencias de política, se verifica que *a* prefiere g' a g" si se cumple que:

$$W^a(g') - W^a(g'') = (y - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - \left[(y - g'')\frac{y^a}{y} + H(g'')\right]$$

$$= (g'' - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - H(g'') > 0$$

Se trata de mostrar que la misma desigualdad deberá ser entonces válida para *b,* si $y^b<y^a$.

$$W^b(g') - W^b(g'') = (g'' - g')\frac{y^b}{y} + H(g') - H(g'') > (g'' - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - H(g'')$$

dado que $(g''-g')<0$ y $y^b<y^a$. Se concluye entonces que:

$$W^b(g') - W^b(g'') > W^a(g') - W^a(g'') > 0$$

Queda pendiente demostrar el simétrico, es decir que los más ricos que *a* preferirán un gobierno más chico que *a*.

3.1. Primero deduzco la función de preferencias de política de los votantes. Los individuos enfrentan la restricción presupuestal $c \leq (1-\tau)y$. Eligen consumir todo su ingreso disponible: $c = (1-\tau)y$. Saben que el gobierno tiene la siguiente restricción presupuestal: $g_1 + g_2 = \tau y \Rightarrow \tau = (g_1 + g_2)/y$. Por lo tanto, las preferencias de política de "i" son: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + \alpha^i Ln(g_1) + (1-\alpha^i)Ln(g_2)$. Reordenando términos: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + Ln(g_2) + \alpha^i (Ln(g_1) - Ln(g_2))$. Esto puede escribirse entonces como: $u(.) = J(g_1, g_2) + K(\alpha^i)H(g_1, g_2)$, donde $K(\alpha^i)$ es obviamente monótona.

3.2. Si $\alpha^i = 1$, entonces la función de preferencias de política se reduce a: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + Ln(g_1)$. Hay que notar antes que nada que esta función es decreciente en g_2 y, por lo tanto, el óptimo es $g_2 = 0$ (dado que $g_2 \geq 0$). Luego resolvemos para g_1, que sí presenta un óptimo interior: $\frac{\partial u}{\partial g_1}(.) = -\frac{1}{y - g_1} + \frac{1}{g_1} = 0 \;\; \Rightarrow g_1 = \frac{y}{2}$.

Programa: Maestría en Economía Internacional
Edición: 2009-2010
Curso: Política Macroeconómica
Docente: Alvaro Forteza

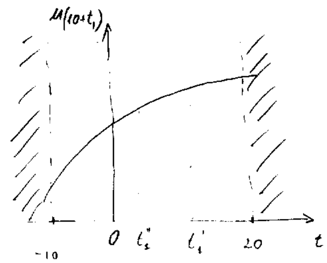
4. (Donde dice 1.1 debe decir 4.1, etc.)

1

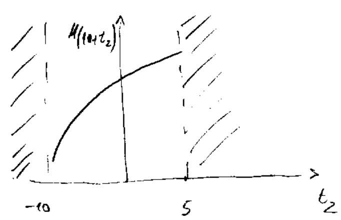
1.1 - Individuos del grupo 1 tienen preferencias $u(10+t_1)$, con $u'(\cdot)>0 \Rightarrow$ prefieren t_1 tan grande como sea posible. Teniendo en cuenta la restricción presupuestal del gobierno : $t_1 = -2t_2 \Rightarrow$ miembros del grupo 1 prefieren t_2 tan chico como sea posible. Es decir $t_2 = -10$

$\Rightarrow \boxed{t_1^* = 20 \; ; \; t_2(t_1^*) = -10}$

Miembros del grupo 2 prefieren t_2 tan grande como sea posible y t_1 tan chico como sea posible : $\boxed{t_2^* = -\frac{-10}{2} = 5 \; ; \; t_1(t_2^*) = -10}$



1.2 - Sí, dado que $u(\cdot)$ es monótona. Gráficamente:



Algebraicamente: se cumple que $t_1'' \leq t_1' \leq t_1^* \Rightarrow$
$u(10+t_1'') \leq u(10+t_1')$

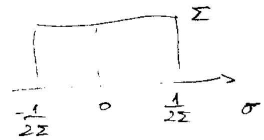
1.3 . Candidatos motivados por el cargo van a favorecer al grupo mayoritario, es decir el grupo 2. Por lo tanto ambos candidatos proponen plataforma : $\boxed{t_1^i = -10, \; t_2^i = 5}$

dECON
Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

2

1.4

Votan por A en i: $\sigma < \sigma_i^* = u(10+t_i^A) - u(10+t_i^B)$



$\Rightarrow$ Proporción votos por A en i $= \Sigma\left(\sigma_i^* + \frac{1}{2\Sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Sigma\sigma_i^*$

$$= \frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_i^A) - u(10+t_i^B)\right]$$

Votos por A:

$$V_A = 1\left\{\frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_1^A) - u(10+t_1^B)\right]\right\} +$$

$$+ 2\left\{\frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_2^A) - u(10+t_2^B)\right]\right\} =$$

$$\boxed{V^A = \frac{3}{2} + \Sigma\left[u(10+t_1^A) - u(10+t_1^B) + 2u(10+t_2^A) - 2u(10+t_2^B)\right]}$$

1.5 -

$$\max_{t_1^A, t_2^A} V^A$$

s.a.: $t_1^A + 2t_2^A = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_1^A} &= \Sigma\, u'(10+t_1^A)(-1) + \lambda_A = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2^A} &= \Sigma\, 2u'(10+t_2^A)(-1) + 2\lambda_A = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u'(10+t_1^A)}{\cancel{2}\, u'(10+t_2^A)} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow t_1^A = t_2^A$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_A} = t_1^A + 2t_2^A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1^A = t_2^A = 0}$$

Candidato B: $\max_{t_1^B, t_2^B} V^B = 3 - V^A$

s.a.: $t_1^B + 2t_2^B = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_1^B} &= -\Sigma\, u'(10+t_1^B)(-1) + \lambda_B = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t_2^B} &= -\Sigma\, 2u'(10+t_2^B)(-1) + 2\lambda_B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u'(10+t_1^B)}{\cancel{2}\, u'(10+t_2^B)} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow t_1^B = t_2^B$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_B} = t_1^B + 2t_2^B = 0$$

$$\boxed{t_1^B = t_2^B = 0}$$

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

5. Resuelvo el modelo con la función de utilidad del lobby modificada. La proporción de votos por A sigue siendo: $\pi_A = \frac{1}{2} + \phi \sum_J \alpha^J \sigma^J$. La probabilidad de que gane A responde a la misma expresión del modelo visto en clase y presentado por Persson y Tabellini. Lo que se modifica ligeramente es el programa que resuelven los lobistas:

$$\underset{C_A^J, C_B^J}{Maximizar} \quad P_A W^J(g_A) + (1-P_A) W^J(g_B) - \tfrac{1}{2}\left[\left(C_A^J / y^J\right)^2 + \left(C_B^J / y^J\right)^2 \right]$$

$sujeto\ a$:

$$P_A = \frac{1}{2} + \psi \left[\sum_J \alpha^J \left(W^J(g_A) - W^J(g_B) \right) + h(C_A - C_B) \right]$$

$$C_A = \sum_J O^J \alpha^J C_A^J \ , \ \ C_B = \sum_J O^J \alpha^J C_B^J$$

$$C_A^J \geq 0, \quad C_B^J \geq 0$$

Resulta entonces que las contribuciones son:

$$C_A^J = Max\left[0, \psi h \alpha^J \left(W^J(g_A) - W^J(g_B) \right) \left(y^J \right)^2 \right]$$

Los políticos eligen entonces el gasto que resuelve:

$$\underset{g_A}{Maximizar} \quad P_A = \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J \right)^2 \right] W^J(g_A) + cte$$

Es decir que maximizan una función de bienestar social a la Bentham donde las ponderaciones de los grupos organizados son mayores cuanto mayor es su ingreso per cápita. En el óptimo se verifica:

$$\frac{\partial p_A}{\partial g_A} = \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J \right)^2 \right] \frac{\partial W^J(g_A^L)}{\partial g_A}$$

$$= \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J \right)^2 \right] \left(- \frac{y^J}{y} + H_g\left(g_A^L \right) \right) = 0$$

Los dos partidos hacen lo mismo en equilibrio: $g^L = g_A^L = g_B^L$. Puede entonces escribirse que el gasto en el equilibrio con lobbies será: $g^L = H_g^{-1}(\hat{y}/y)$, donde:

$$\hat{y} = \frac{\sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right] y^J}{\sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right]} = \frac{\sum_J \left[\psi + (\psi h)^2 (1/3) \left(y^J\right)^2\right] y^J}{\sum_J \left[\psi + (\psi h)^2 (1/3) \left(y^J\right)^2\right]} > y$$

, dado que el lado izquierdo es un promedio ponderado de los ingresos donde reciben mayor ponderación los ingresos mayores. Se concluye entonces que: $g_A^L < g^*$, siendo g^* el gasto correspondiente al "óptimo social" (sin lobbies). Este resultado de un menor gasto público en equilibrio es consistente con la observación hecha más arriba de que los grupos con mayor ingreso per cápita se benefician. En este modelo, el gobierno pondera más a los ricos al elegir el monto del gasto y los ricos prefieren un gobierno más chico.